

Formulario di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Rappresentazione con lo stato

Forma stazionaria	$x(t) = \varphi(t - t_0, x(t_0), u _{[t_0, t)}), \quad y(t) = \eta(x(t), u(t))$
Sistema lineare	$x(t) = x_L(t) + x_F(t)$ libera $x_L(t) = \varphi(t - t_0, x(t_0), 0)$, forzata $x_F(t) = \varphi(t - t_0, 0, u _{[t_0, t)})$
Dimensioni	$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p, \quad y \in \mathbb{R}^q; \quad \Phi: n \times n, \quad H: n \times p, \quad \Psi: q \times n, \quad W: q \times p$

Rappresentazioni lineari stazionarie

	Tempo continuo	Tempo discreto
Forma implicita	$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$ $y(t) = C x(t) + D u(t)$ $x(t_0) = x_0$	$x(t+1) = A x(t) + B u(t)$ $y(t) = C x(t) + D u(t)$ $x(t_0) = x_0$
Evoluzione libera	$x_L(t) = e^{A(t-t_0)} x_0$	$x_L(t) = A^{t-t_0} x_0$
Evoluzione forzata	$x_F(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$	$x_F(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} A^{t-1-\tau} B u(\tau)$
Forma esplicita	$x(t) = \Phi(t - t_0) x_0$ $+ \int_{t_0}^t H(t - \tau) u(\tau) d\tau$ $y(t) = \Psi(t - t_0) x_0$ $+ \int_{t_0}^t W(t - \tau) u(\tau) d\tau$	$x(t) = \Phi(t - t_0) x_0$ $+ \sum_{\tau=t_0}^{t-1} H(t - \tau) u(\tau)$ $y(t) = \Psi(t - t_0) x_0$ $+ \sum_{\tau=t_0}^t W(t - \tau) u(\tau)$
Φ e H	$\Phi(t) = e^{At}$ $H(t) = e^{At} B$	$\Phi(k) = A^k$ $H(k) = A^{k-1} B \quad (k \geq 1)$
Ψ e W	$\Psi(t) = C e^{At}$ $W(t) = C e^{At} B + D \delta(t)$	$\Psi(k) = C A^k$ $W(k) = C A^{k-1} B \quad (k \geq 1)$ $W(0) = D$
Dalla esplicita	$A = \dot{\Phi}(0), \quad B = H(0), \quad C = \Psi(0)$	$A = \Phi(1), \quad B = H(1) \quad (\text{non } H(0))$

Proprietà della forma esplicita (continuo e discreto)

Proprietà di Φ	$\Phi(0) = I, \quad \Phi(t - t_0) = \Phi(t - t_1) \Phi(t_1 - t_0)$
Risposta all'impulso	$u = e_j \delta, \quad x_0 = 0: \quad x(t) = H(t) e_j, \quad y(t) = W(t) e_j \quad (\text{colonne } j)$

Forma spettrale e coppie complesse (continuo e discreto)

Forma spettrale	$A = U \Lambda U^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i v_i \quad \text{se } g_i = r_i \text{ per ogni } i$ $v_i \text{ righe di } U^{-1}, \quad v_i u_j = \delta_{ij}, \quad c_i = v_i x_0$
Coppia complessa	$\lambda = \alpha + i\omega \quad (\omega > 0), \quad u = u_A + i u_B$ $A \begin{pmatrix} u_A & u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A & u_B \end{pmatrix} J, \quad J = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$
Coefficienti, $t_0 = 0$	$c_A = v_A x_0 = m \sin \varphi, \quad c_B = v_B x_0 = m \cos \varphi, \quad m = \sqrt{c_A^2 + c_B^2}$
Piano della coppia	$x_0 = z_1 u_A + z_2 u_B: \quad z(t) = e^{J(t-t_0)} z(t_0)$ spirale verso 0 ($\alpha < 0$), divergente ($\alpha > 0$), curva chiusa ($\alpha = 0$)

Modi

	Tempo continuo	Tempo discreto
Forma spettrale	$e^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i v_i$	$A^t = \sum_{i=1}^n \lambda_i^t u_i v_i$
Libera, $t_0 = 0$	$x_L(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} u_i$	$x_L(t) = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^t u_i$
Modo reale	$\lambda < 0$: converge a 0 $\lambda = 0$: costante $\lambda > 0$: diverge	$ \lambda < 1$: converge a 0 $\lambda = 1$: costante; $\lambda = -1$: $\pm c_i u_i$ $ \lambda > 1$: diverge $\lambda < 0$: alternante $\lambda = 0$: nullo per $t \geq 1$
Blocco della coppia	$e^{Jt} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$	$J^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos \theta t & \sin \theta t \\ -\sin \theta t & \cos \theta t \end{pmatrix}$ $\lambda = \rho e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi$ $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$
Modo pseudoperiodico	$m e^{\alpha t} [\sin(\omega t + \varphi) u_A + \cos(\omega t + \varphi) u_B]$	$m \rho^t [\sin(\theta t + \varphi) u_A + \cos(\theta t + \varphi) u_B]$
Andamento	$\alpha < 0$: converge a 0 $\alpha = 0$: oscilla, periodo $2\pi/\omega$ $\alpha > 0$: diverge	$\rho < 1$: converge a 0 $\rho = 1$: limitato $\rho > 1$: diverge mai alternante

Osservabilità ed eccitabilità (continuo e discreto)

Modi in Ψ, H, W	$\Psi(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} (C u_i) v_i, \quad H(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} u_i (v_i B)$ $W(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} (C u_i)(v_i B) + D \delta(t): \quad \text{solo modi eccitabili e osservabili}$
Non osservabile	$C u_i = 0;$ autovalore multiplo: $C U_i = 0;$ coppia: $C u_A = C u_B = 0$

Non eccitabile	$v_i B = 0$; autovalore multiplo: $V_i B = 0$; coppia: $v_A B = v_B B = 0$ dall'ingresso j : $v_i b_j = 0$
Coefficiente in W	$C R_i B = (C U_i)(V_i B)$: con $r_i > 1$ può annullarsi anche se il modo è eccitabile e osservabile

Autovalori multipli e forma reale a blocchi

Molteplicità	$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \prod_{i=1}^K (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, $g_i = n - \text{rk}(A - \lambda_i I)$, $1 \leq g_i \leq r_i$
Matrici residue	$e^{At} = \sum_{i=1}^K e^{\lambda_i t} R_i$, $R_i = U_i V_i$, $\text{rk } R_i = r_i$, $\text{Im } R_i = E_i = \text{Ker}(A - \lambda_i I)$
Forma reale a blocchi	se $g_i = r_i$ per gli autovalori reali e le coppie sono semplici: $T^{-1} = (u_1 \cdots u_\mu \ u_{1A} \ u_{1B} \ \cdots \ u_{\nu A} \ u_{\nu B})$, $\mu + 2\nu = n$ $TAT^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_\mu, J_1, \dots, J_\nu)$

Cambio di coordinate

Nuove coordinate	$z = T x$, T invertibile e costante $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$, $\tilde{D} = D$
Base degli autovettori	$T = U^{-1}$: $\tilde{A} = \Lambda$, righe di $\tilde{B}$: $v_i B$, colonne di $\tilde{C}$: $C u_i$

Strumenti di calcolo

Esponenziale	$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ (non elemento per elemento)
Derivata	$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$
Regola di Leibniz	$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, \tau) d\tau = f(t, b(t)) \dot{b}(t) - f(t, a(t)) \dot{a}(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, \tau) d\tau$
Impulso di Dirac	$\int_a^b f(\tau) \delta(\tau - T) d\tau = f(T)$ se $T \in [a, b]$

Da un'equazione di ordine n alla forma implicita

Equazione	$p^{(n)} + a_{n-1} p^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{p} + a_0 p = b u$
Stato	$x = (p, \dot{p}, \dots, p^{(n-1)})^T$: $\dot{x}_i = x_{i+1}$ per $i < n$
Matrici	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

Campionamento con mantentore di ordine zero (ZOH)

Istanti	$t = kT, \quad T \text{ passo di campionamento}$
Ingresso mantenuto	$u_c(t) = u_d(k) \quad \text{per } kT \leq t < (k+1)T$
Uscita campionata	$y_d(k) = y_c(kT)$

Sistema discretizzato

	Tempo continuo	Discretizzato, passo T
Forma implicita	$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$ $y(t) = C x(t) + D u(t)$	$x_d(k+1) = A_d x_d(k) + B_d u_d(k)$ $y_d(k) = C_d x_d(k) + D_d u_d(k)$
Matrici	$A, \quad B, \quad C, \quad D$	$A_d = e^{AT}$ $B_d = \int_0^T e^{A\theta} d\theta B$ $C_d = C, \quad D_d = D$
A invertibile		$B_d = A^{-1}(e^{AT} - I) B$
Evoluzione libera	$x_L(t) = e^{At} x_0$	$x_{d,L}(k) = A_d^k x_0 = e^{AkT} x_0$ il continuo campionato in kT
Autovettori	$u_i, \quad v_i$	$u_{di} = u_i, \quad v_{di} = v_i$ se A è diagonalizzabile
Autovalore reale	λ_i	$\lambda_{di} = e^{\lambda_i T} > 0$: mai alternante
Coppia complessa	$\lambda_i = \alpha + i\omega$	$\rho = e^{\alpha T}, \quad \theta = \omega T \quad \text{se } 0 < \omega T < \pi$ alterna se $\omega T = (2m+1)\pi$