

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Capitolo 8: La trasformata di Laplace

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Definizione e linearità · Funzioni nulle prima di zero · Teorema della derivata
Il sistema nel dominio di s · Convoluzione e funzione di trasferimento
Trasformate elementari

Indice

1	Definizione e linearità	1
2	Funzioni nulle prima di zero	1
3	Teorema della derivata	2
4	Il sistema nel dominio di s	3
5	Convoluzione e funzione di trasferimento	3
6	Trasformate elementari	5
7	Esercizi	6
8	Soluzioni	8

La risposta forzata a un ingresso qualunque richiede un integrale di convoluzione, matrice per vettore, elemento per elemento. La trasformata di Laplace porta i conti dal tempo t alla variabile complessa s , dove quell'integrale diventa un prodotto.

1 Definizione e linearità

Definizione – Trasformata di Laplace

La **trasformata di Laplace** di una funzione $f(t)$, definita per $t \geq 0$, è la funzione della variabile complessa s

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

definita per gli s in cui l'integrale converge: un semipiano $\operatorname{Re} s > \alpha_f$.

Si trasforma un vettore o una matrice di funzioni elemento per elemento, come si integra.

Proposizione – Linearità

Per costanti a, b e funzioni f, g :

$$\mathcal{L}[a f(t) + b g(t)] = a F(s) + b G(s).$$

La dimostrazione è la linearità dell'integrale. È la proprietà che serve: i sistemi studiati sono lineari, e lo restano nel dominio di s .

2 Funzioni nulle prima di zero

L'integrale parte da 0: due funzioni uguali per $t \geq 0$ e diverse prima hanno la stessa trasformata, e da $F(s)$ non si saprebbe da quale si è partiti.

Definizione – Gradino e funzioni nulle prima di zero

Il **gradino unitario** è

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

e $f(t) \delta_{-1}(t)$ è la funzione nulla per $t < 0$ e uguale a $f(t)$ per $t \geq 0$. Si trasformano solo funzioni di questo tipo: allora la trasformata è **biunivoca**, e da $F(s)$ si torna a una sola funzione del tempo.

Per i sistemi non è una perdita: lo stato si descrive da $t_0 = 0$ in poi, e prima di 0 ingressi e uscite non interessano.

Osservazione – δ_{-1} non cambia la trasformata

Da 0 in poi $\delta_{-1}(t) = 1$, quindi

$$\mathcal{L}[f(t) \delta_{-1}(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s),$$

non il prodotto $F(s) \cdot \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)]$: il fattore δ_{-1} dice solo che la funzione parte da 0. Una costante c da trasformare è sempre $c\delta_{-1}(t)$.

3 Teorema della derivata

Teorema – Trasformata della derivata

Se $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, per $\text{Re } s > \alpha_x$:

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s X(s) - x(0)$$

Dimostrazione

1. **Per parti.** Si integra $\dot{x}$ e si deriva e^{-st} :

$$\int_0^{+\infty} \dot{x}(t) e^{-st} dt = \left[x(t) e^{-st} \right]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt.$$

2. **All'infinito.** Con $s = \sigma + i\omega$, $e^{-st} = e^{-\sigma t} e^{-i\omega t}$, e $|e^{-i\omega t}| = 1$: il secondo fattore gira sul cerchio unitario. Decide $e^{-\sigma t}$, che, se σ è abbastanza grande, porta $x(t) e^{-st}$ a zero.

3. **In zero.** $e^{-s \cdot 0} = 1$: resta $-x(0)$, e l'ultimo integrale è $X(s)$.

□

Ogni derivata nel tempo diventa una moltiplicazione per s , meno il valore iniziale: le equazioni differenziali diventano equazioni algebriche.

4 Il sistema nel dominio di s

Teorema – La rappresentazione in s

Per $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ con $x(0) = x_0$, se s non è un autovalore di A :

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}x_0 + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) \end{aligned}$$

Dimostrazione

1. **Si trasformano i due membri.** Per la linearità e il teorema della derivata:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s), \quad Y(s) = CX(s) + DU(s).$$

2. **Si raccoglie $X(s)$.** s è uno scalare e A una matrice: si scrive $sX(s) = sIX(s)$, e $(sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$.
3. **Si inverte.** $\det(sI - A) = 0$ solo negli autovalori di A ; altrimenti si moltiplica a sinistra per $(sI - A)^{-1}$, e si sostituisce $X(s)$ in $Y(s)$.

□

Come nel tempo, la parte con x_0 è l'evoluzione libera, quella con $U(s)$ la forzata: la linearità mantiene la separazione.

Osservazione – Una sola rappresentazione

Nel tempo ci sono due forme, esplicita e implicita (differenziale), che differiscono per il modo di guardare l'evoluzione nel tempo. In s il tempo non c'è: trasformando l'una o l'altra si ottiene la stessa rappresentazione.

5 Convoluzione e funzione di trasferimento

Teorema – Convoluzione

La trasformata di un **integrale di convoluzione** è il prodotto delle trasformate:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$$

anche con f matrice e g vettore, se il prodotto fg è definito.

Dimostrazione

1. **Si scambiano gli integrali.** Nella regione $0 \leq \tau \leq t$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_\tau^{+\infty} f(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt \right) e^{-s\tau} g(\tau) d\tau.$$

2. **Si cambia variabile.** Con $r = t - \tau$ l'integrale interno è $F(s)$, e resta $F(s) \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} g(\tau) d\tau = F(s) G(s)$.

□

Proposizione – Le matrici della forma esplicita in s

Le trasformate delle matrici della forma esplicita (Capitoli 2 e 3) sono

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}, & H(s) &= (sI - A)^{-1}B, \\ \Psi(s) &= C(sI - A)^{-1}, & W(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \end{aligned}$$

$W(s)$, $q \times p$, è la **funzione di trasferimento** del sistema.

Dimostrazione

1. **Forma esplicita.** Con $t_0 = 0$, $x(t) = \Phi(t) x_0 + \int_0^t H(t-\tau) u(\tau) d\tau$ e $y(t) = \Psi(t) x_0 + \int_0^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau$.
2. **Si trasforma.** Per la linearità e la convoluzione, $X(s) = \Phi(s) x_0 + H(s) U(s)$ e $Y(s) = \Psi(s) x_0 + W(s) U(s)$.
3. **Si confronta** con il teorema della Sezione 4. Le due espressioni valgono per ogni x_0 e ogni ingresso: con $u = 0$ e x_0 i vettori della base canonica i coefficienti di x_0 coincidono, poi coincidono quelli di $U(s)$.

□

Osservazione – Il termine D

In $W(t) = C H(t) + D \delta(t)$ (Capitolo 2) il legame diretto entra con l'impulso. Perché la trasformata di $D \delta(t)$ sia D serve $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$: infatti

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1,$$

per la proprietà dell'impulso, con l'impulso in $t = 0$ dentro l'intervallo d'integrazione.

Nota – Che cosa si guadagna

$\Phi(s)$, $H(s)$, $\Psi(s)$ e $W(s)$ dipendono solo dal sistema: si calcolano una volta, e invece di e^{At} si calcola $(sI - A)^{-1}$. Per la risposta forzata in uscita si trasforma l'ingresso e si moltiplica: $Y(s) = W(s)U(s)$, al posto dell'integrale di convoluzione.

6 Trasformate elementari

Proposizione – Prime trasformate

Le funzioni del tempo sono nulle per $t < 0$; $k \geq 0$ intero.

$f(t)$	$F(s)$	dove
$\delta(t)$	$\boxed{1}$	ogni s
$\delta_{-1}(t)$	$\boxed{\frac{1}{s}}$	$\text{Re } s > 0$
$\frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$	$\boxed{\frac{1}{s^{k+1}}}$	$\text{Re } s > 0$

Dimostrazione

1. **Impulso:** osservazione della Sezione 5.

2. **Gradino.** Per $\text{Re } s > 0$, $e^{-st} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s}.$$

3. **Potenze, per parti.** Per $k \geq 1$ si deriva $\frac{t^k}{k!}$ e si integra e^{-st} :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!} e^{-st} dt = \left[\frac{t^k}{k!} \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-st} dt.$$

Il termine fra parentesi è nullo: in 0 per t^k , all'infinito perché l'esponenziale vince sul polinomio se $\text{Re } s > 0$.

4. **Ricorsione.** Ogni potenza aggiunge un fattore $\frac{1}{s}$; si parte da $k = 0$, il gradino, con $\frac{1}{s}$: dopo k passi $\frac{1}{s^{k+1}}$.

□

Per la linearità, $\mathcal{L}[t^k \delta_{-1}(t)] = \frac{k!}{s^{k+1}}$ e $\mathcal{L}[c \delta_{-1}(t)] = \frac{c}{s}$: con la tabella si trasforma ogni polinomio, termine per termine.

Esempio – Un polinomio

Per $f(t) = (2 + 3t^2 + t^4) \delta_{-1}(t)$ si scrive ogni potenza con il suo fattoriale:

$$F(s) = 2 \mathcal{L}[\delta_{-1}] + 3 \cdot 2 \mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!}\right] + 4! \mathcal{L}\left[\frac{t^4}{4!}\right] = \frac{2}{s} + \frac{6}{s^3} + \frac{24}{s^5}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

L'esponenziale e^{at} , la legge dei modi naturali, è l'Esercizio 1.

Riepilogo

- **Definizione:** $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$, per $\operatorname{Re} s > \alpha_f$; lineare.
- **Unicità:** si trasformano funzioni nulle per $t < 0$, scritte $f(t)\delta_{-1}(t)$.
- **Derivata:** $\mathcal{L}[\dot{x}] = sX(s) - x(0)$.
- **Stato:** $X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$.
- **Uscita:** $Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$.
- **Convoluzione:** diventa il prodotto $F(s)G(s)$; $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$.
- **Funzione di trasferimento:** $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.
- **Tabella:** $\delta \rightarrow 1$, $\delta_{-1} \rightarrow \frac{1}{s}$, $\frac{t^k}{k!} \rightarrow \frac{1}{s^{k+1}}$.

7 Esercizi

Esercizio 1 – La trasformata dell'esponenziale

Calcola la trasformata di $e^{at}\delta_{-1}(t)$, con a reale, e dove esiste. Confrontala con $\Phi(s)$ per un sistema con $n = 1$.

Soluzione a pagina 8 →

Esercizio 2 – Esonero del 14/11/2025 (fila A), Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 4

Posto $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, calcolare l'espressione di $\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right]$.

Soluzione a pagina 8 →

Esercizio 3 – Appello del 24/07/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.5 & -1.5 \\ -1.5 & 0.5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

e. calcolare la funzione di trasferimento.

Soluzione a pagina 8 →

8 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – La trasformata dell'esponenziale

Calcolo. Per la definizione,

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}.$$

Dove. Il termine all'infinito si annulla se $\operatorname{Re}(s-a) > 0$, cioè per $\operatorname{Re} s > a$: l'ascissa di convergenza è a . È il conto del gradino con $s-a$ al posto di s , e per $a=0$ si ritrova $\frac{1}{s}$.

Confronto. Con $n=1$, $A=a$ è uno scalare, $e^{At} = e^{at}$ e $\Phi(s) = (s-a)^{-1}$: lo stesso risultato.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 6](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Esonero del 14/11/2025 (fla A), Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 4

Si applica due volte il teorema della derivata, prima a $g = \dot{f}$, poi a f :

$$\mathcal{L}[\ddot{f}] = s \mathcal{L}[\dot{f}] - \dot{f}(0) = s(sF(s) - f(0)) - \dot{f}(0) = s^2 F(s) - s f(0) - \dot{f}(0),$$

per $\operatorname{Re} s$ abbastanza grande perché il teorema valga per f e per $\dot{f}$. Ogni derivata dà un fattore s e un termine con un valore iniziale.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 6](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Appello del 24/07/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

L'inversa. $\det(sI - A) = (s - 0.5)^2 - 2.25 = (s - 2)(s + 1)$, e

$$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{(s-2)(s+1)} \begin{pmatrix} s-0.5 & -1.5 \\ -1.5 & s-0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Funzione di trasferimento. Con $D=0$:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s+1}.$$

Lettura. Gli autovalori sono 2 e -1 , ma in $W(s)$ resta solo $s+1$. Infatti $AB = -B$: B è un autovettore di -1 , il modo di 2 (autovettore $(1 \ -1)^T$) non è eccitabile, e $W(t) = C e^{At} B = e^{-t}$, la cui trasformata è $\frac{1}{s+1}$ (Esercizio 1 con $a = -1$).

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 7](#)