

Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Capitolo 7: Sistemi a tempo campionato

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Campionatore e mantenitore di ordine zero
Il sistema a tempo discreto equivalente
Evoluzione libera e autovalori · I modi del sistema campionato

Indice

1	Campionatore e mantenitore	1
2	Il sistema a tempo discreto equivalente	2
3	Evoluzione libera e autovalori	3
4	I modi del sistema campionato	4
5	Esercizi	6
6	Soluzioni	7

1 Campionatore e mantenitore

Definizione – Campionatore e mantenitore di ordine zero

Sia $T > 0$ il **periodo di campionamento** e $k \in \mathbb{Z}$ l'indice dei campioni.

- Il **campionatore** legge un segnale continuo solo negli istanti $t = kT$: da $y(t)$ dà la sequenza $y_D(k) := y(kT)$.
- Il **mantenitore di ordine zero** (ZOH, *zero order holder*) fa l'opposto: da una sequenza $u_D(k)$ costruisce il segnale continuo

$$u(t) = u_D(k) \quad \text{per } kT \leq t < (k+1)T$$

che tiene costante ogni campione fino al successivo.

Un sistema fisico a tempo continuo comandato da un dispositivo digitale riceve e fornisce numeri solo a passi di durata T . Fra due campioni d'ingresso il sistema continua però a evolvere e ha bisogno di un ingresso in ogni istante: il mantenitore glielo fornisce. Il campionatore, all'uscita, riporta $y(t)$ a una sequenza (Figura 1).

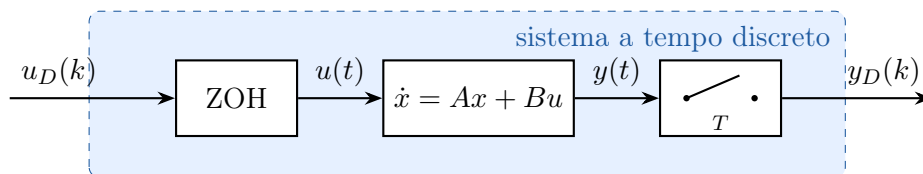


Figura 1: Il sistema continuo fra il mantenitore e il campionatore, sincronizzati con lo stesso periodo T : dall'esterno entra e esce una sequenza.

Il mantenitore si chiama così perché *tiene* un valore. L'**ordine** è il grado del polinomio con cui riempie l'intervallo fra due campioni: costante, ordine zero; retta, ordine uno; e così via.

Osservazione – Perché l'ordine zero

Per tracciare una retta da $u_D(k)$ a $u_D(k+1)$ già nell'istante kT serve il campione successivo, che arriva solo in $(k+1)T$. Un mantenitore di ordine maggiore di zero deve quindi aspettare uno o più campioni: introduce un **ritardo**, più grande quanto più alto è l'ordine. L'ordine zero usa solo il campione già arrivato.

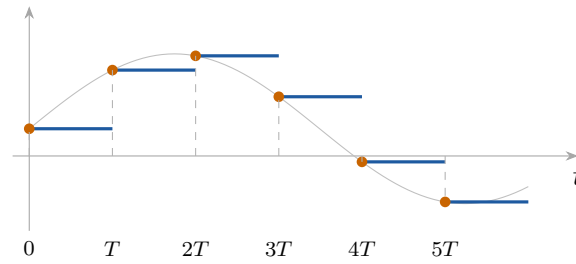


Figura 2: Mantenitore di ordine zero: i campioni $u_D(k)$ (punti) e il segnale costante a tratti $u(t)$ che entra nel sistema continuo.

2 Il sistema a tempo discreto equivalente

Teorema – Sistema a tempo discreto equivalente

Il sistema continuo $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, fra un mantenitore di ordine zero e un campionatore di periodo T sincronizzati, con $x_D(k) := x(kT)$, $u_D(k) := u(kT)$ e $y_D(k) := y(kT)$, è descritto dalla rappresentazione alle differenze

$$x_D(k+1) = A_D x_D(k) + B_D u_D(k), \quad y_D(k) = C x_D(k) + D u_D(k)$$

con

$$A_D = e^{AT}, \quad B_D = \int_0^T e^{A\theta} d\theta B$$

Dimostrazione

1. **Un passo.** Nella forma esplicita dello stato (Capitoli 2 e 3) si prende istante iniziale kT e osservazione in $(k+1)T$:

$$x((k+1)T) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

2. **Ingresso costante.** Nell'intervallo d'integrazione il mantenitore dà $u(\tau) = u_D(k)$, che esce dall'integrale.
3. **Cambio di variabile.** Con $\theta = (k+1)T - \tau$ si ha $d\theta = -d\tau$; per $\tau = kT$ è $\theta = T$, per $\tau = (k+1)T$ è $\theta = 0$. Il segno meno si toglie scambiando gli estremi:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} d\tau = \int_0^T e^{A\theta} d\theta.$$

4. **Uscita.** La trasformazione d'uscita è istantanea: in $t = kT$ dà $y(kT) = C x(kT) + D u(kT)$, con $u(kT) = u_D(k)$.

□

L'integrale di una matrice si fa elemento per elemento: B_D è una matrice costante, $n \times$

p come B . A_D dice come evolve lo stato libero in un periodo; B_D raccoglie l'effetto dell'ingresso tenuto costante in quel periodo. C e D restano le stesse.

Proposizione – B_D con A invertibile

Se A è invertibile,

$$B_D = A^{-1}(e^{AT} - I)B$$

Dimostrazione

La derivata di $A^{-1}e^{A\theta}$ è $e^{A\theta}$ (Capitolo 3), quindi $\int_0^T e^{A\theta} d\theta = A^{-1}(e^{AT} - e^0) = A^{-1}(e^{AT} - I)$. $\square$

Il tempo del sistema equivalente è l'indice k dei campioni: per il sistema conta solo che il passo k venga dopo il passo $k-1$, e T resta dentro A_D e B_D . Il campione k corrisponde all'istante $t = kT$ dell'orologio. A θ si può dare qualunque nome: dopo l'integrazione non compare più.

Con A_D e B_D valgono tutti i risultati del Capitolo 6. Da un passo all'altro il sistema equivalente è **esatto**, non approssimato: negli istanti kT dà proprio $x(kT)$ e $y(kT)$, perché l'ingresso è davvero costante fra due campioni.

3 Evoluzione libera e autovalori

Proposizione – L'evoluzione libera campionata

Con $k_0 = 0$ e $x_D(0) = x_0$:

$$x_D(k) = A_D^k x_0 = e^{AkT} x_0 = x(kT)$$

l'evoluzione libera del sistema equivalente è quella continua letta negli istanti kT .

Proposizione – Autovalori del sistema campionato

$A_D = e^{AT}$ ha gli stessi autovettori di A e, per ogni autovalore λ_i di A , l'autovalore

$$\lambda_{D,i} = e^{\lambda_i T}$$

Dimostrazione

Se $A = U\Lambda U^{-1}$, la forma spettrale del Capitolo 3 con $t = T$ dà

$$A_D = e^{AT} = Ue^{\Lambda T}U^{-1} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i T} u_i v_i,$$

con $e^{\Lambda T}$ diagonale: è la forma spettrale di A_D , con le stesse u_i e v_i e gli autovalori $e^{\lambda_i T}$. Per una coppia complessa il blocco reale J del Capitolo 5 dà e^{JT} : è il blocco del Capitolo 6 con $\rho = e^{\alpha T}$ e $\theta = \omega T$, cioè gli autovalori $e^{(\alpha \pm i\omega)T}$. $\square$

La parte geometrica del sistema (autovettori, autospazi, righe v_i) passa intatta al sistema campionato; cambiano solo le leggi temporali, $e^{\lambda_i kT} = \lambda_{D,i}^k$ al posto di $e^{\lambda_i t}$ (Figura 3).

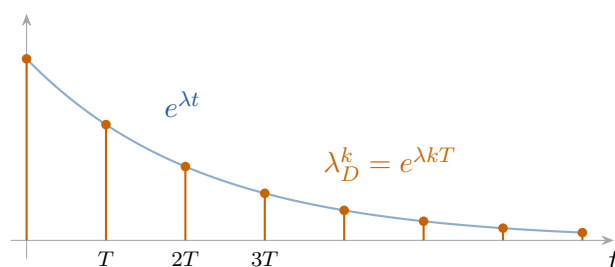


Figura 3: Un modo aperiodico convergente ($\lambda < 0$) e la sua legge nel sistema campionato: gli stessi valori, solo negli istanti kT .

4 I modi del sistema campionato

Per un autovalore reale λ , $\lambda_D = e^{\lambda T}$ è sempre positivo, e il segno di λ decide da che parte di 1 cade:

tempo continuo	sistema campionato	modo
$\lambda > 0$	$\lambda_D > 1$	aperiodico divergente
$\lambda = 0$	$\lambda_D = 1$	aperiodico costante
$\lambda < 0$	$0 < \lambda_D < 1$	aperiodico convergente

Il modo campionato ha lo stesso comportamento di quello continuo.

Proposizione – Autovalori che un sistema campionato non ha

- $\lambda_D = 0$ mai: $A_D = e^{AT}$ è invertibile, con inversa e^{-AT} .
- λ_D reale negativo solo da una coppia complessa $\alpha \pm i\omega$ con ωT multiplo dispari di π : allora $e^{(\alpha \pm i\omega)T} = -e^{\alpha T}$, autovalore doppio.

Quindi un modo alternante nel sistema campionato viene solo da un modo pseudoperiodico, e i modi alternanti sono sempre a coppie.

Dimostrazione

1. **Reali.** Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $e^{\lambda T} > 0$.
2. **Coppie.** $e^{(\alpha + i\omega)T} = e^{\alpha T}(\cos \omega T + i \sin \omega T)$ è reale solo se $\sin \omega T = 0$, e negativo se inoltre $\cos \omega T = -1$, cioè $\omega T = (2m + 1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.
3. **Il blocco.** Con $\omega T = (2m + 1)\pi$ si ha $e^{JT} = -e^{\alpha T}I$: ogni vettore del piano della coppia è un autovettore di $-e^{\alpha T}$.

□

L'alternanza ha una lettura semplice: con $\omega T = \pi$ si campiona ogni mezzo periodo dell'oscillazione, e $\cos(\omega kT + \varphi) = (-1)^k \cos \varphi$ cambia segno a ogni campione. Per un modo continuo aperiodico questo non succede: un esponenziale reale non cambia segno, e campionarlo non lo fa cambiare.

Un sistema nato discreto, come quelli del Capitolo 6, può invece avere autovalori negativi o nulli qualsiasi.

Riepilogo

- **Schema:** mantenitore di ordine zero, sistema continuo, campionatore di periodo T .
- **Ordine zero:** $u(t) = u_D(k)$ per $kT \leq t < (k + 1)T$; ordini maggiori introducono ritardo.
- **Sistema equivalente:** $x_D(k + 1) = A_D x_D(k) + B_D u_D(k)$, $y_D(k) = C x_D(k) + D u_D(k)$.
- **Matrici:** $A_D = e^{AT}$, $B_D = \int_0^T e^{A\theta} d\theta B = A^{-1}(e^{AT} - I)B$ se A è invertibile.
- **Evoluzione libera:** $x_D(k) = e^{AkT} x_0 = x(kT)$.
- **Autovalori:** $\lambda_D = e^{\lambda T}$, stessi autovettori.
- **Modi:** da λ reale mai alternanti; $\lambda_D \neq 0$; alternanti solo a coppie, da $\omega T = (2m + 1)\pi$.

5 Esercizi

Esercizio 1 – Appello del 30/01/2023 (fila A), Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2

Dato il sistema descritto da

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

- calcolare l'evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- calcolare la risposta indiciale;
- determinare la rappresentazione nello spazio di stato a tempo discreto del sistema ottenuto campionando il sistema dato con tempo di campionamento $T_c = \pi$;
- per il sistema ottenuto al punto c., calcolare l'evoluzione libera a partire dallo stato iniziale $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, confrontando il risultato con quanto ottenuto al punto a.;
- per il sistema ottenuto al punto c., calcolare la risposta indiciale.

Soluzione a pagina 7 →

Esercizio 2 – Appello del 05/11/2024, II canale, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 2

È dato il sistema con rappresentazione nello spazio di stato

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t).$$

Calcolare la rappresentazione nello spazio di stato del sistema a tempo discreto equivalente ottenuto mediante campionamento con tempo di campionamento $T = 3$ sec.

Soluzione a pagina 8 →

6 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Appello del 30/01/2023 (fila A), Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2

- a. **Esponenziale.** $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 5 = \lambda^2 + 4$: autovalori $\pm 2i$, con $\alpha = 0$ e $\omega = 2$. Inoltre $A^2 = -4I$, quindi nella serie di e^{At} le potenze pari danno il coseno e le dispari il seno:

$$e^{At} = \cos 2t I + \frac{\sin 2t}{2} A = \begin{pmatrix} \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t & \frac{1}{2} \sin 2t \\ -\frac{5}{2} \sin 2t & \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Evoluzione libera (seconda colonna):

$$x_L(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin 2t \\ \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \end{pmatrix},$$

un modo pseudoperiodico limitato, di periodo π .

- b. **Risposta indiciale.** Con $D = 0$, $W(t) = C e^{At} B = \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t$, e con $u = \delta_{-1}$:

$$y_F(t) = \int_0^t W(t - \tau) d\tau = \int_0^t W(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{4} (1 - \cos 2t), \quad t \geq 0.$$

- c. **Sistema campionato.** Con $T = \pi$:

$$A_D = e^{A\pi} = \cos 2\pi I + \frac{\sin 2\pi}{2} A = I,$$

$$B_D = \int_0^\pi \left(\cos 2\theta I + \frac{\sin 2\theta}{2} A \right) d\theta B = 0,$$

perché $\int_0^\pi \cos 2\theta d\theta = \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = 0$. Quindi $x_D(k+1) = x_D(k)$, $y_D(k) = (0 \ 1) x_D(k)$. Gli autovalori sono $e^{\pm 2i\pi} = 1$, doppio: $\omega T = 2\pi$.

- d. **Evoluzione libera campionata.** $x_D(k) = A_D^k x_0 = x_0$ per ogni k . È $x_L(k\pi)$: il periodo di campionamento è uguale al periodo del modo, e ogni campione cade nello stesso punto dell'oscillazione, che non si vede più.
- e. **Risposta indiciale campionata.** Con $B_D = 0$ e $D = 0$, $y_D(k) = \sum_{\tau=0}^{k-1} C A_D^{k-1-\tau} B_D = 0$ per ogni k . Coincide con $y_F(k\pi) = 0$ del punto b.: l'ingresso non arriva mai all'uscita negli istanti di campionamento.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 6](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Appello del 05/11/2024, II canale, Prof.ssa Claudia Califano, esercizio 2

Esponenziale. $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 9$: autovalori $\pm 3i$. Si verifica $A^2 = -9I$, quindi, come nell'Esercizio 1,

$$e^{At} = \cos 3t I + \frac{\sin 3t}{3} A.$$

A_D . Con $T = 3$:

$$A_D = e^{3A} = \begin{pmatrix} \cos 9 + \frac{1}{3} \sin 9 & \frac{10}{3} \sin 9 \\ -\frac{1}{3} \sin 9 & \cos 9 - \frac{1}{3} \sin 9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,774 & 1,374 \\ -0,137 & -1,049 \end{pmatrix}.$$

B_D . Integrando termine per termine:

$$\int_0^3 e^{A\theta} d\theta = \frac{\sin 9}{3} I + \frac{1 - \cos 9}{9} A,$$

e con $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$B_D = \frac{\sin 9}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1 - \cos 9}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,350 \\ -0,212 \end{pmatrix}.$$

Lo stesso risultato dà $A^{-1}(A_D - I)B$, con $A^{-1} = -\frac{1}{9}A$.

Rappresentazione.

$$x_D(k+1) = A_D x_D(k) + B_D u_D(k), \quad y_D(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_D(k).$$

Controllo: $\det A_D = \cos^2 9 + \sin^2 9 = 1$, il prodotto degli autovalori $e^{\pm 9i}$.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 6](#)