Appunti di Sistemi Dinamici

Canale 1 · Prof. Paolo Di Giamberardino

Capitolo 10: Osservabilità dello spazio di stato

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

---

Argomenti: Stati indistinguibili e inosservabili · Matrice di inosservabilità · Cayley-Hamilton
Classi di stati indistinguibili · Coordinate adattate

Indice

1 Ingresso, stato e uscita **1**

2 Stati indistinguibili e stati inosservabili **1**

3 La matrice di inosservabilità **3**

4 Classi di stati indistinguibili **5**

5 Coordinate adattate a $\mathcal{I}$ **6**

6 Esercizi **7**

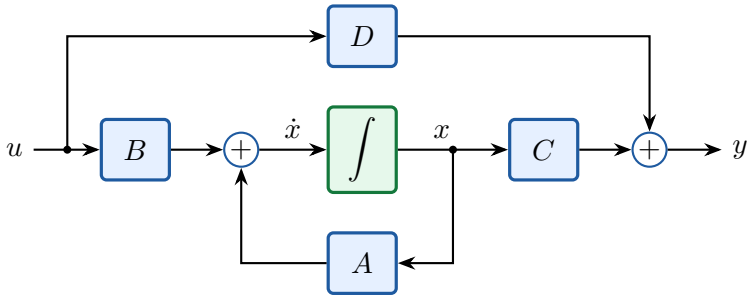
7 Soluzioni **9**

1 Ingresso, stato e uscita

Un sistema lineare stazionario a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t), \qquad y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$$

si disegna aprendo la scatola in tre parti: l'ingresso entra nella dinamica attraverso B, la dinamica produce lo stato x, lo stato arriva all'uscita attraverso C.



A tempo discreto lo schema è lo stesso: al posto dell'integratore c'è il ritardo di un passo, che da $x(t+1)$ dà $x(t)$.

Lo schema separa due problemi, da studiare uno alla volta:

1. **ingresso → stato**: come l'ingresso, attraverso B, agisce sullo stato;
2. **stato → uscita**: come lo stato, attraverso C, determina l'uscita.

D porta l'ingresso direttamente all'uscita, senza passare per la dinamica, e non entra in nessuno dei due problemi. Questo capitolo studia il secondo.

2 Stati indistinguibili e stati inosservabili

Definizione – Stati indistinguibili

Due stati $x_a \neq x_b$ sono **indistinguibili** se, presi come stati iniziali, danno la stessa uscita per ogni ingresso e in ogni istante:

$$\boxed{y(t;\,x_a,\,u) = y(t;\,x_b,\,u) \quad \text{per ogni } u \text{ e ogni } t \geq t_0}$$

Il «per ogni» conta: due stati che danno la stessa uscita con un solo ingresso non sono indistinguibili, perché un altro esperimento potrebbe separarli. Se esistono stati indistinguibili, guardando l'uscita non si può dire da quale stato il sistema è partito.

Con $t_0 = 0$ e $\Psi(t) = C\,e^{At}$ le due uscite sono

$$y_a(t) = \Psi(t)\,x_a + \int_0^t W(t-\tau)\,u(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad y_b(t) = \Psi(t)\,x_b + \int_0^t W(t-\tau)\,u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

La parte forzata è la stessa, quindi nella differenza resta solo l'evoluzione libera.

Definizione – Stato inosservabile

Uno stato x_I è **inosservabile** se la sua evoluzione libera in uscita è identicamente nulla:

$$\boxed{C\,e^{At}\,x_I = 0 \quad \text{per ogni } t \geq 0}$$

L'insieme degli stati inosservabili si indica con $\mathcal{I}$.

Proposizione – Indistinguibili e inosservabili

x_a e x_b sono indistinguibili se e solo se $x_a - x_b$ è inosservabile. Quindi:

1. esistono stati indistinguibili se e solo se esiste uno stato inosservabile non nullo;
2. gli stati indistinguibili da x_b sono tutti e soli gli stati $x_b + x_I$, con $x_I \in \mathcal{I}$.

Dimostrazione

1. **Solo se.** Se le uscite coincidono, sottraendo si ottiene $C\,e^{At}(x_a - x_b) = 0$ per ogni $t \geq 0$: la differenza è inosservabile.
2. **Se.** Se $x_a - x_b = x_I$ è inosservabile, allora $y_a(t) - y_b(t) = C\,e^{At}x_I = 0$ per ogni ingresso e ogni t.
3. **Conseguenze.** Dato $x_I \neq 0$ e uno stato qualunque x_b, lo stato $x_a = x_b + x_I$ è diverso da x_b e indistinguibile da lui.

□

Basta quindi studiare gli stati inosservabili: una coppia indistinguibile dà uno stato inosservabile, e uno stato inosservabile non nullo dà infinite coppie indistinguibili, una per ogni stato di partenza.

Nota – Errore tipico: il rango di $\Psi(t)$

La condizione $\Psi(t)\,x_I = 0$ non si studia con il rango di $\Psi(t)$: i suoi elementi sono funzioni della variabile t, non numeri o parametri fissati, quindi il rango non è definito. Per questo nella Sezione 3 si elimina il tempo.

3 La matrice di inosservabilità

Definizione – Matrice di inosservabilità

Per un sistema di dimensione n con q uscite, la **matrice di inosservabilità** è la matrice $nq \times n$

$$\boxed{\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}}$$

Per caratterizzare gli stati inosservabili serve eliminare il tempo, e per questo serve il teorema di Cayley-Hamilton.

Teorema – Cayley-Hamilton

Ogni matrice quadrata annulla il proprio polinomio caratteristico. Se $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ è il polinomio caratteristico di A, allora

$$\boxed{A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I}$$

cioè A^n è combinazione lineare delle potenze $A^0, \ldots, A^{n-1}$.

Teorema – Stati inosservabili

Lo stato x_I è inosservabile se e solo se $\mathcal{O}\, x_I = 0$:

$$\boxed{\mathcal{I} = \operatorname{Ker} \mathcal{O}}$$

Quindi $\mathcal{I}$ è un sottospazio lineare dello spazio di stato, di dimensione $n - \operatorname{rk} \mathcal{O}$.

La dimostrazione elimina il tempo in due passi: prima la condizione per ogni t diventa un sistema di infinite equazioni senza t, poi Cayley-Hamilton ne tiene solo n.

Dimostrazione

1. **Via il tempo.** Con lo sviluppo in serie dell'esponenziale
$$C\,e^{At}\,x_I = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}\,CA^k\,x_I.$$
Una serie di potenze è identicamente nulla per $t \geq 0$ se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli, quindi x_I è inosservabile se e solo se $CA^k x_I = 0$ per ogni $k \geq 0$.
2. **Bastano n equazioni.** Moltiplicando Cayley-Hamilton per C a sinistra e per x_I a destra,
$$CA^n x_I = -a_{n-1}\,CA^{n-1}x_I - \cdots - a_0\,Cx_I,$$
quindi se $CA^k x_I = 0$ per $k = 0, \dots, n-1$ anche $CA^n x_I = 0$. Moltiplicando prima per A^h, ogni $CA^{n+h}x_I$ dipende dalle n equazioni precedenti, e a cascata da quelle con $k = 0, \dots, n-1$.
3. **Conclusione.** Le infinite equazioni equivalgono alle prime n, cioè a $\mathcal{O}\,x_I = 0$. Il nucleo di una matrice è un sottospazio, di dimensione $n - \operatorname{rk}\mathcal{O}$.

□

In particolare non esistono stati indistinguibili se e solo se $\mathcal{O}$ ha rango pieno, $\operatorname{rk}\mathcal{O} = n$. Se invece il rango è minore di n, gli stati inosservabili non nulli sono infiniti e formano un sottospazio, descritto da una base.

Esempio – Un sistema del secondo ordine

Sia
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Allora $CA = (0 \;\; -1)$ e
$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rk}\mathcal{O} = 1, \qquad \mathcal{I} = \operatorname{Ker}\mathcal{O} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$
Il controllo diretto: la seconda equazione è $\dot{x}_2 = -x_2$, quindi l'evoluzione libera in uscita è $y(t) = e^{-t}x_2(0)$, che si annulla per ogni t se e solo se $x_2(0) = 0$.

Gli Esercizi 1 e 2 applicano il teorema a sistemi del terzo ordine.

4 Classi di stati indistinguibili

Proposizione – Classe di uno stato

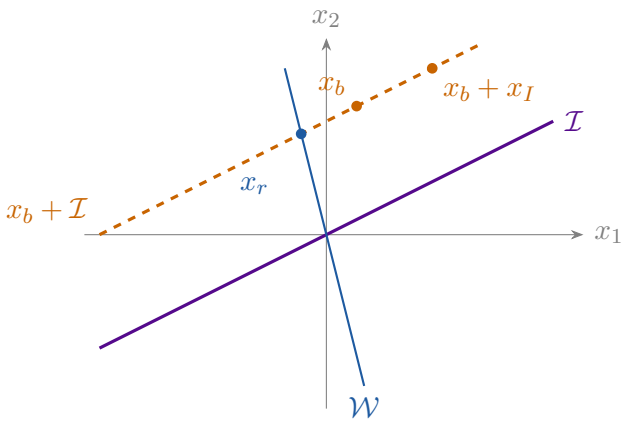
Gli stati indistinguibili da x_b, insieme a x_b, formano la sua **classe**

$$\boxed{x_b + \mathcal{I} = \{\, x_b + x_I : x_I \in \mathcal{I} \,\}}$$

È un insieme parallelo a $\mathcal{I}$, della stessa dimensione. Non è un sottospazio, se $x_b \notin \mathcal{I}$, perché non contiene lo zero.

Tutti gli stati di una classe danno la stessa uscita con lo stesso ingresso, quindi per l'uscita basta un rappresentante per classe. Se lo stato iniziale si può scegliere, conviene prendere nella classe quello più semplice da realizzare: il comportamento visto dall'uscita non cambia.

Nell'esempio del secondo ordine della Sezione 3 le classi sono le rette orizzontali $x_2 =$ costante: tutti gli stati con la stessa $x_2(0)$ danno la stessa uscita $e^{-t}x_2(0)$.



Il disegno mostra $\mathcal{I}$, la classe di x_b e un complemento $\mathcal{W}$, cioè un sottospazio con $\mathcal{I} \oplus \mathcal{W} = \mathbb{R}^n$. Ogni classe incontra $\mathcal{W}$ in un solo punto, come x_r per la classe di x_b: un complemento contiene esattamente un rappresentante per classe.

Nota – Errore tipico: gli stati non inosservabili

Gli stati fuori da $\mathcal{I}$ sono gli stati **non inosservabili**.

- Non formano un sottospazio: manca lo zero e non hanno una base.
- Non coincidono con un complemento $\mathcal{W}$, neanche con l'ortogonale $\mathcal{I}^\perp$: $\mathcal{W}$ contiene solo alcuni stati non inosservabili, e la classe di x_b ne contiene altri fuori da $\mathcal{W}$.

$\mathcal{I} \oplus \mathcal{W} = \mathbb{R}^n$ dice che una base di $\mathcal{I}$ affiancata a una base di $\mathcal{W}$ è una base di $\mathbb{R}^n$, non che lo spazio si divida in inosservabili e osservabili.

5 Coordinate adattate a $\mathcal{I}$

Con $\dim \mathcal{I} = m$, conviene una base dello spazio di stato i cui primi m vettori sono una base di $\mathcal{I}$. Nelle nuove coordinate si legge dalle componenti se uno stato è inosservabile.

Proposizione – Cambio di base adattato

Siano $v_1, \dots, v_m$ una base di $\mathcal{I}$ e $w_{m+1}, \dots, w_n$ vettori che la completano a una base di $\mathbb{R}^n$. Con

$$\boxed{T^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_m & w_{m+1} & \cdots & w_n \end{pmatrix}, \qquad z = T\,x}$$

uno stato è inosservabile se e solo se le sue ultime $n - m$ coordinate $z_{m+1}, \dots, z_n$ sono nulle.

Dimostrazione

1. Da $x = T^{-1}z$ si ha $x = z_1 v_1 + \cdots + z_m v_m + z_{m+1} w_{m+1} + \cdots + z_n w_n$: le colonne di T^{-1} sono i vettori della nuova base. Con $z = (1, 0, \dots, 0)$ si ottiene la prima colonna, cioè v_1.
2. $x \in \mathcal{I}$ se e solo se è combinazione dei soli v_i, cioè se e solo se i coefficienti dei w_j sono nulli, perché la scrittura in una base è unica.

□

Il completamento serve solo a rendere T^{-1} invertibile: non deve essere ortogonale a $\mathcal{I}$. Conviene sceglierlo pieno di zeri e di uni, così il determinante e l'inversa si calcolano subito e con pochi errori.

Esempio – Una base adattata nel piano

Sia

$$\mathcal{I} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

completato con il vettore $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det T^{-1} = -1, \qquad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per uno stato di $\mathcal{I}$ la seconda coordinata è nulla, per uno stato fuori no:

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow z = Tx = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nota – Nella dispensa

La dispensa del corso chiama $\mathcal{O}$ «matrice di osservabilità» e mette la base di $\mathcal{I}$ negli *ultimi* vettori di T^{-1}: cambiano il nome e l'ordine dei blocchi, non il contenuto.

Riepilogo

- **Due problemi**: ingresso $\to$ stato attraverso B, stato $\to$ uscita attraverso C; D resta fuori.
- **Indistinguibili**: stessa uscita per ogni ingresso e ogni t; se e solo se la differenza è inosservabile.
- **Inosservabile**: $C\,e^{At}x_I = 0$ per ogni $t \geq 0$.
- **Matrice di inosservabilità**: $\mathcal{O} = (C;\ CA;\ \ldots;\ CA^{n-1})$, e $\mathcal{I} = \operatorname{Ker}\mathcal{O}$, di dimensione $n - \operatorname{rk}\mathcal{O}$.
- **Cayley-Hamilton**: $p(A) = 0$, quindi A^n dipende da $A^0, \ldots, A^{n-1}$ e bastano n blocchi.
- **Classe**: $x_b + \mathcal{I}$, parallela a $\mathcal{I}$, non sottospazio; un complemento ne contiene un rappresentante.
- **Non inosservabili**: non sono un sottospazio, né l'ortogonale di $\mathcal{I}$.
- **Base adattata**: $T^{-1} = (\text{base di } \mathcal{I} \mid \text{completamento})$; inosservabile se e solo se le ultime coordinate di $z = Tx$ sono nulle.

6 Esercizi

Esercizio 1 – Appello del 16/04/2026 (fila A), Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

Sia dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + u.$$

a. Studiarne la proprietà di inosservabilità dello spazio di stato.

b. Determinarne uno stato (numerico) inosservabile.

c. Determinarne uno stato (numerico) non inosservabile.

d. Determinarne, se esiste, uno stato (numerico) non inosservabile e linearmente indipendente da quello individuato al punto c.

Soluzione a pagina 9 →

Esercizio 2 – Appello del 12/06/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

Sia dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} u, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + 2u.$$

a. Studiarne la proprietà di inosservabilità dello spazio di stato.

b. Determinarne uno stato (numerico) non inosservabile.

Soluzione a pagina 10 →

7 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Appello del 16/04/2026 (fila A), Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

a. Con $C = (1 \quad -1 \quad 0)$:

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad CA^2 = (CA)\,A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La terza riga è uguale alla prima, mentre le prime due sono indipendenti, quindi $\operatorname{rk}\mathcal{O} = 2 < 3$ ed esistono stati inosservabili non nulli. $\mathcal{O}\,x = 0$ dà $x_1 - x_2 = 0$ e $2x_3 = 0$:

$$\mathcal{I} = \operatorname{Ker}\mathcal{O} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \dim\mathcal{I} = 1.$$

Il termine diretto u in y non conta: D non entra nella dinamica. Controllo: con $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ si ha $Av = 2v$, quindi $e^{At}v = e^{2t}v$ e $C\,e^{At}v = e^{2t}(1-1) = 0$ per ogni t.

b. $x = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, o un suo multiplo non nullo.

c. Ogni stato fuori da $\mathcal{I}$, per esempio

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{O}\,x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

d. Esiste, perché gli stati non inosservabili non sono un sottospazio di dimensione 1: sono tutto lo spazio tranne una retta. Per esempio

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{O}\,x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

indipendente dallo stato del punto c.

← Torna all'Esercizio 1, pagina 7

Soluzione dell'Esercizio 2 – Appello del 12/06/2026, Canale 1, Prof. Paolo Di Giamberardino, esercizio 2, adattato

a. Con $C = (0 \;\; 1 \;\; 0)$, CA è la seconda riga di A:

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad CA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{rk} \mathcal{O} = 1$, quindi $\dim \mathcal{I} = 3 - 1 = 2$, e $\mathcal{O}\, x = 0$ dà solo $x_2 = 0$:

$$\mathcal{I} = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Controllo: $\dot{x}_2 = -x_2$, quindi l'evoluzione libera in uscita è $y(t) = e^{-t} x_2(0)$, nulla per ogni t se e solo se $x_2(0) = 0$.

b. Ogni stato con $x_2 \neq 0$, per esempio

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{O}\, x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

← *Torna all'Esercizio 2, pagina 8*