

Formulario di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Modelli di programmazione

Assegnamento	$x_{ij} \in \{0, 1\}$: 1 se l'ingegnere i va al progetto j $\min \sum_{i,j} t_{ij} x_{ij} \quad \sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad \sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$
Zaino	$x_i \in \{0, 1\}$: 1 se si ingaggia il relatore i $\max \sum_i c_i x_i \quad \sum_i a_i x_i \leq b$
Trasporto	$x_{ij} \geq 0$: quantità spedita da i a j $\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \quad \sum_j x_{ij} \leq a_i \quad (\text{capacità}) \quad \sum_i x_{ij} = d_j \quad (\text{domanda})$ $x_{ij} \in \mathbb{Z}$ se il bene è indivisibile
Calendario	$x_{ijk} \in \{0, 1\}$: 1 se i ospita j alla giornata k $\sum_{j \neq i} (x_{ijk} + x_{jik}) = 1 \quad \forall i, k \quad \sum_k (x_{ijk} + x_{jik}) = 1 \quad \forall i < j$ $\sum_{j \neq i} x_{ijk} = 0$: i non ospita alla giornata k

Vettori, norme e distanze in $\mathbb{R}^n$

Ordine	$x \leq y \iff x_i \leq y_i, \quad i = 1, \dots, n$
Prodotti	scalare: $x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ Hadamard: $(x \circ y)_i = x_i y_i$ diadico: $(x y^T)_{ij} = x_i y_j$
Norme	$\ x\ _2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x^T x = \ x\ _2^2 \quad \ x\ _1 = \sum_{i=1}^n x_i \quad \ x\ _\infty = \max_i x_i $ $\ x\ _0$: numero di $x_i \neq 0$, non è una norma
Proprietà norma	$\ x\ \geq 0, \quad \ x\ = 0 \iff x = 0 \quad \ \alpha x\ = \alpha \ x\ \quad \ x + y\ \leq \ x\ + \ y\ $
Intorno sferico	$\mathcal{B}_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x - x_0\ < \rho\}$ $\mathcal{B}_1(0)$ in $\mathbb{R}^2$: $\ \cdot\ _1$ rombo, $\ \cdot\ _2$ cerchio, $\ \cdot\ _\infty$ quadrato
Cauchy-Schwarz	$ x^T y \leq \ x\ _2 \ y\ _2$, uguale $\iff x, y$ paralleli
Angolo	$\cos \theta = \frac{x^T y}{\ x\ _2 \ y\ _2}, \quad \theta \in [0, \pi], \quad x, y \neq 0 \quad \text{ortogonali: } x^T y = 0$

Punti e insiemi di $\mathbb{R}^n$

Punto interno	$\exists \rho > 0 : \mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq E$; interno $\mathring{E}$
Punto esterno	$\exists \rho > 0 : \mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq \text{co}(E)$
Punto di frontiera	$\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \cap E \neq \emptyset$ e $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \cap \text{co}(E) \neq \emptyset \quad \forall \rho > 0$; frontiera ∂E
Accumulazione	$(\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \cap E) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset, \quad \forall \rho > 0$ derivato $\mathcal{D}(E) = \mathring{E} \cup (\partial E \setminus \{\text{isolati}\})$
Punto isolato	$\bar{x} \in E, \quad \mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \cap E = \{\bar{x}\}$ per un $\rho > 0$

Aperto e chiuso	$E \text{ aperto} \iff E = \overset{\circ}{E} \quad \emptyset \text{ e } \mathbb{R}^n: \text{ sia aperti sia chiusi}$ $E \text{ chiuso} \iff \text{co}(E) \text{ aperto} \iff \partial E \subseteq E \iff \mathcal{D}(E) \subseteq E \iff E = \overline{E}$
Chiusura	$\overline{E} = E \cup \partial E = E \cup \mathcal{D}(E)$
Unioni, intersezioni	$A_i \text{ aperti: } \bigcup_{i \in I} A_i \text{ e } \bigcap_{i=1}^k A_i \text{ aperti}$ $C_i \text{ chiusi: } \bigcap_{i \in I} C_i \text{ e } \bigcup_{i=1}^k C_i \text{ chiusi}$

Vincoli, compatti e Weierstrass

Vincoli continui	$g_i, h_j \text{ continue: } \{x : g_i(x) < 0 \forall i\} \text{ è aperto}$ $\{x : g_i(x) \leq 0 \forall i, h_j(x) = 0 \forall j\} \text{ è chiuso}$
Limitato, compatto	$E \text{ limitato: } \exists M > 0 : \ x\ \leq M \quad \forall x \in E$ $E \text{ compatto} \iff \text{chiuso e limitato}$
Funzione limitata	$\exists M > 0 : \ f(x)\ \leq M \quad \forall x \in D$ $f \text{ scalare: } f(x) \geq m \text{ (inferiormente), } f(x) \leq M \text{ (superiormente)}$
Weierstrass	$E \neq \emptyset \text{ compatto, } f \text{ continua su } E:$ $\exists x_{\min}, x_{\max} \in E : f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \forall x \in E$

Limiti di funzioni

Limite finito	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ (} x_0 \text{ di accumulazione per } D \text{):}$ $x \in D, 0 < \ x - x_0\ < \delta \Rightarrow f(x) - L < \varepsilon$
Limite $\pm\infty$	$\forall M \exists \delta > 0: 0 < \ x - x_0\ < \delta \Rightarrow f(x) > M \text{ (} f(x) < M \text{ per } -\infty \text{)}$
Valori vettoriali	$0 < \ x - x_0\ < \delta \Rightarrow \ f(x) - L\ < \varepsilon$ limite ∞ : $0 < \ x - x_0\ < \delta \Rightarrow \ f(x)\ > M$
Per $x \rightarrow \infty$	in $\mathbb{R}^n$: $\ x\ > A$ al posto di $0 < \ x - x_0\ < \delta$ in $\mathbb{R}$: $x > A \text{ (+}\infty\text{), } x < A \text{ (-}\infty\text{)}$
Punto ∞	$\mathbb{R}_*^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \quad \infty \text{ di accumulazione per } E \iff E \text{ illimitato}$
Teorema ponte	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = L$ per ogni $\{x_k\} \subseteq D \setminus \{x_0\}$ con $x_k \rightarrow x_0$
Non esistenza	$a_k, b_k \in D \setminus \{x_0\}, a_k, b_k \rightarrow x_0$ $f(a_k) \rightarrow L_1, f(b_k) \rightarrow L_2, L_1 \neq L_2$: il limite non esiste
Limite e restrizioni	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f _A(x) = L \quad \forall A \subseteq D \text{ con } x_0 \in \mathcal{D}(A)$ due restrizioni con limiti diversi: il limite non esiste

Continuità

Continuità in x_0	$x_0 \in D$ isolato, oppure x_0 di accumulazione e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
Lipschitz continua	$ f(x) - f(y) \leq L \ x - y\ \quad \forall x, y \in D, \quad L > 0$ costante raggio uniforme: $\delta_\varepsilon = \varepsilon/L$
Continuità uniforme	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: f(x) - f(y) < \varepsilon \quad \forall x, y \in D \text{ con } \ x - y\ < \delta_\varepsilon$
Classi di funzioni	$C^L(D) \subseteq C^U(D) \subseteq C^0(D)$
Heine–Cantor	D compatto, $f \in C^0(D) \Rightarrow f \in C^U(D)$

Successioni

Sottosuccessione	$y_i = x_{k_i}, \quad k_1 < k_2 < k_3 < \dots$
Limite	$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}: k \geq k_\varepsilon \Rightarrow \ x_k - \bar{x}\ < \varepsilon$ $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \infty: k \geq k_M \Rightarrow \ x_k\ > M$
Carattere	convergente: $x_k \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ divergente: $x_k \rightarrow \infty$ irregolare: né convergente né divergente
Punto limite	$\lim_{\substack{k \in K \\ k \rightarrow \infty}} x_k = \hat{x} \quad x_k \rightarrow \bar{x} \Rightarrow \bar{x}$ unico punto limite due punti limite distinti $\Rightarrow \{x_k\}$ non converge
Monotona in $\mathbb{R}$	crescente: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \sup_k x_k$ decrescente: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \inf_k x_k$ limite in $\mathbb{R}^*$: finito se $\{x_k\}$ limitata, altrimenti $\pm\infty$
Per componenti	norma euclidea: $x_k \rightarrow \bar{x} \iff (x_k)_i \rightarrow \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n$ $\{x_k\}$ limitata $\iff$ ogni $\{(x_k)_i\}$ limitata
Bolzano–Weierstrass	$\{x_k\}$ limitata: $\exists K, \bar{x}$ con $\lim_{\substack{k \in K \\ k \rightarrow \infty}} x_k = \bar{x} \quad x_k \in E \text{ compatto} \Rightarrow \bar{x} \in E$ E limitato con infiniti punti: $\mathcal{D}(E) \neq \emptyset$

Funzioni lineari e quadratiche

Funzione lineare	$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y) \iff F(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ colonne di A : $F(e_1), \dots, F(e_n) \quad m = 1: f(x) = c^\top x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$
Funzione affine	$f(x) = c^\top x + b$, lineare solo se $b = 0$
Forma quadratica	$q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = x^\top A x$
Funzione quadratica	$f(x) = x^\top A x + c^\top x + b$
Matrice simmetrica	$S = \frac{1}{2}(A + A^\top)$ simmetrica, $x^\top A x = x^\top S x$

Metodi di Newton e del gradiente

Metodo di Newton	$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ se $f'(x_k) \neq 0$
Convergenza locale	f' continua vicino a $\bar{x}$, $f(\bar{x}) = 0$, $f'(\bar{x}) \neq 0$: $\exists \varepsilon > 0 : x_0 - \bar{x} < \varepsilon \Rightarrow x_k \rightarrow \bar{x}$
Metodo del gradiente	$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k)$, $\alpha_k > 0$ con $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, finché $f'(x_k) \neq 0$
Dimezzamento	$\alpha = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ fino a $f(x_k - \alpha f'(x_k)) < f(x_k)$
Passo costante	$ f'(x) - f'(y) \leq L x - y \quad \forall x, y: \quad \alpha_k = \alpha, \quad 0 < \alpha < 2/L$

Perceptron

Uscita	$y = F(x; v, \theta) = G(v^\top x - \theta) = G\left(\sum_{i=1}^n v_i x_i - \theta\right)$
Gradino	$G(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$
Frontiera, $n = 2$	$v_1 x_1 + v_2 x_2 = \theta$
Training set	$\mathcal{T} = \{(x^{(p)}, y^{(p)})\}_{p=1}^P, \quad y^{(p)} \in \{0, 1\}$
Logistica	$\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$ al posto di G : $F = \sigma(v^\top x - \theta)$
Errore da minimizzare	$\min_{v, \theta} \sum_{p=1}^P (F(x^{(p)}; v, \theta) - y^{(p)})^2$