Teoria del primo esonero di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Tutti i risultati del programma dell'esonero dell'11 novembre 2026, capitoli 1–5 di G. Liuzzi e M. Sciandrone, *Complementi di Matematica*, con il numero del libro e le definizioni chiave.

Dimostrazione da fare: il programma o il diario delle lezioni la segnano «con dimostrazione». **Dimostrazione dubbia**: fatta a lezione e non saltata dal programma, ma nessuno dei due la segna; studiala dopo. **Solo enunciato**: basta l'enunciato. Il riepilogo in fondo le elenca con la pagina.

Fuori programma

1. Paragrafi 1.5.1, 1.5.3 e 1.8; Lemma 1.15, Teorema 1.4, Proposizione 1.27, Proprietà 1.33; la dimostrazione di Cauchy-Schwarz (1.16).
2. Paragrafo 2.5; Esempi 2.18 e 2.23; Proposizioni 2.21 e 2.22, Teorema 2.23; le dimostrazioni dell'appendice.
3. La dimostrazione della 3.1; paragrafi 3.3, 3.5, 3.9 e 3.10; nel 3.7, dal Teorema 3.4 in poi.
4. Le dimostrazioni delle 4.2 e 4.19.
5. Dal paragrafo 5.6 in poi; le dimostrazioni delle 5.5, 5.15 e 5.16.

1 Lo spazio $\mathbb{R}^n$

Estremo superiore ed estremo inferiore

Teorema 1.1 – Esistenza degli estremi superiore e inferiore

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Esiste $\sup A \in \mathbb{R}$ se e solo se A è limitato superiormente. Esiste $\inf A \in \mathbb{R}$ se e solo se A è limitato inferiormente. In particolare esistono entrambi se e solo se A è limitato.

Solo enunciato

Teorema 1.2 – Caratterizzazione dell'estremo superiore

Il valore $\Omega \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se

(i) Ω è un maggiorante di A;

(ii) comunque preso $\varepsilon > 0$, $\Omega - \varepsilon$ non è più un maggiorante, cioè esiste $x \in A$ tale che $\Omega - \varepsilon < x$.

Solo enunciato

Teorema 1.3 – Caratterizzazione dell'estremo inferiore

Il valore $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se

(i) λ è un minorante di A;

(ii) comunque preso $\varepsilon > 0$, $\lambda + \varepsilon$ non è più un minorante, cioè esiste $x \in A$ tale che $x < \lambda + \varepsilon$.

Solo enunciato

Norme e distanze in $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.12 – Norma

Una **norma** su $\mathbb{R}^n$ è una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, con $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, tale che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

(1) $\|x\| \geq 0$;

(2) $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$;

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare).

Proposizione 1.16 – Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $x^\mathsf{T} y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ il prodotto scalare,

$$|x^\mathsf{T} y| \leq \|x\|_2 \, \|y\|_2,$$

e vale l'uguaglianza se e solo se i due vettori sono paralleli, cioè uno è multiplo dell'altro.

Solo enunciato

Intorni, insiemi aperti, insiemi chiusi

Definizione 1.28-1.29 – Insieme aperto e insieme chiuso

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. L'**intorno sferico** di $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ di raggio $\rho > 0$ è l'insieme dei punti che distano da $\bar{x}$ meno di ρ, $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \rho\}$. Un punto $\bar{x} \in E$ è **interno** a E se esiste un intorno sferico di $\bar{x}$ tutto contenuto in E, cioè $\exists\, \rho > 0 : \mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq E$. Il **complementare** di E è $\mathrm{co}(E) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin E\}$. L'insieme E è

- **aperto** se ogni suo punto è interno;
- **chiuso** se il suo complementare $\mathrm{co}(E)$ è aperto.

Proprietà 1.30 – Unione e intersezione di insiemi aperti

Siano $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi aperti.

1. L'unione $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperta, con I un insieme di indici qualsiasi, finito o infinito.
2. L'intersezione $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ è aperta, con $k \geq 1$ un intero.

Solo enunciato

Proprietà 1.31 – Intersezione e unione di insiemi chiusi

Siano $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi chiusi.

1. L'intersezione $\bigcap_{i \in I} C_i$ è chiusa, con I un insieme di indici qualsiasi, finito o infinito.
2. L'unione $\bigcup_{i=1}^{k} C_i$ è chiusa, con $k \geq 1$ un intero.

Solo enunciato

Punti di accumulazione e isolati

Definizione 1.34 – Punto di accumulazione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è **di accumulazione** per E se ogni suo intorno sferico contiene un punto di E diverso da $\bar{x}$, cioè

$$\big(\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \cap E\big) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset \qquad \forall \rho > 0.$$

L'insieme dei punti di accumulazione di E si chiama **derivato** di E e si indica con $\mathscr{D}(E)$.

Proposizione 1.36 – Caratterizzazione degli insiemi chiusi

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Le tre affermazioni seguenti sono equivalenti:

(1) E è chiuso;
(2) $\partial E \subseteq E$;
(3) $\mathscr{D}(E) \subseteq E$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Si dimostra il cerchio (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1), perché tre implicazioni bastano per l'equivalenza.

(1) **(1) $\Rightarrow$ (2).** Dimostrare $\partial E \subseteq E$ equivale a dimostrare che un punto fuori da E non è di frontiera. Se $\bar{x} \notin E$, allora $\bar{x} \in \text{co}(E)$, che è aperto perché E è chiuso: esiste $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq \text{co}(E)$. Questo intorno non contiene punti di E, quindi $\bar{x} \notin \partial E$.
(2) **(2) $\Rightarrow$ (3).** Per assurdo, sia $\bar{x} \in \mathscr{D}(E)$ con $\bar{x} \notin E$. Non è interno, perché non sta in E, e non è isolato, perché è di accumulazione. È quindi di frontiera: ogni suo intorno sferico contiene un punto di E, perché $\bar{x}$ è di accumulazione, e contiene anche $\bar{x} \in \text{co}(E)$. Allora $\bar{x} \in \partial E \subseteq E$, contro $\bar{x} \notin E$.
(3) **(3) $\Rightarrow$ (1).** Si dimostra che $\text{co}(E)$ è aperto. Sia $\bar{x} \in \text{co}(E)$. Poiché $\mathscr{D}(E) \subseteq E$, $\bar{x}$ non è di accumulazione: un intorno $\mathcal{B}_\rho(\bar{x})$ non contiene punti di E diversi da $\bar{x}$, e poiché $\bar{x} \notin E$ non ne contiene nessuno. Quindi $\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) \subseteq \text{co}(E)$.

□

Definizione 1.37-1.38 – Insieme limitato e insieme compatto

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è **limitato** se la norma dei suoi elementi non supera una costante:

$$\exists\, M > 0 : \quad \|x\| \leq M \qquad \forall x \in E.$$

In $\mathbb{R}^n$ un insieme si dice **compatto** se è chiuso e limitato.

2 Funzioni in $\mathbb{R}^n$

Limiti di funzioni vettoriali

Definizione 2.4, 2.6 – Intorni sferici e intorni

Si pone $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $\mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, aggiungendo a $\mathbb{R}^n$ un solo elemento, il punto all'infinito. Ogni elemento di $\mathbb{R}^*$ e di $\mathbb{R}^n_*$ ha i suoi **intorni sferici**:

di $x_0 \in \mathbb{R}^n$	$\mathcal{B}_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \rho\}$,	$\rho > 0$;
di $+\infty$	$\{x \in \mathbb{R} : x > A\} \cup \{+\infty\}$,	$A \in \mathbb{R}$;
di $-\infty$	$\{x \in \mathbb{R} : x < A\} \cup \{-\infty\}$,	$A \in \mathbb{R}$;
di ∞	$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > A\} \cup \{\infty\}$,	$A > 0$.

Nello spazio esteso, un **intorno** di un elemento è un insieme aperto che contiene un suo intorno sferico.

Definizione 2.5, 2.7, 2.9 – Limite

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n_*$ un punto di accumulazione di D e $\ell \in \mathbb{R}^m_*$. Si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se per ogni intorno $\mathcal{U}(\ell)$ esiste un intorno $\mathcal{N}(x_0)$ tale che

$$x \in \big(\mathcal{N}(x_0) \cap D\big) \setminus \{x_0\} \implies f(x) \in \mathcal{U}(\ell).$$

Per $n = 1$ al posto di $\mathbb{R}^n_*$ si usa $\mathbb{R}^*$, e per $m = 1$ al posto di $\mathbb{R}^m_*$.

Definizione – Limite di una funzione di più variabili

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di D. Si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon;$$

si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (rispettivamente $-\infty$) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$x \in D,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies f(x) > M \quad \text{(rispettivamente } f(x) < M\text{)}.$$

Proposizione 2.10 – Limite di una funzione vettoriale e limiti delle componenti

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ un punto di accumulazione per D, $\ell \in \mathbb{R}^m$, e

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \qquad \ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix}.$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \ell_i \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Solo enunciato

Successioni in $\mathbb{R}^n$

Definizione – Sottosuccessione

Sia $K = \{k_1, k_2, k_3, \dots\}$ un insieme infinito di indici del dominio di $\{x_k\}$, con $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$. La **sottosuccessione** di $\{x_k\}$ di indici K è la successione $\{y_i\}$ con $y_i = x_{k_i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$; si indica anche con $\{x_k\}_K$.

Proposizione 2.14 – Successioni limitate e componenti

Con la norma euclidea, una successione $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ è limitata se e solo se ogni successione $\{(x_k)_i\}$ delle componenti è limitata, per $i = 1, \dots, n$.

Solo enunciato

Limiti di successioni in $\mathbb{R}^n$

Definizione 2.17 – Limite di una successione

Sia $\{x_k\}$ una successione in $\mathbb{R}^n$. Si scrive $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice k_ε tale che

$$k \geq k_\varepsilon \implies \|x_k - \bar{x}\| < \varepsilon.$$

Teorema 2.24 – Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$

Ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.

Solo enunciato

Teorema 2.25 – Bolzano-Weierstrass per successioni

Ogni successione $\{x_k\}$ in $\mathbb{R}^n$ limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente: esistono un insieme infinito di indici K e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\lim_{\substack{k \in K \\ k \to \infty}} x_k = \bar{x}.$$

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Le successioni delle componenti sono limitate (Proposizione 2.14).

(1) **Prima componente.** $\{(x_k)_1\}$ è reale e limitata, quindi per Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$ (Teorema 2.24) esiste K_1 con $(x_k)_1 \to \bar{x}_1$ per $k \in K_1$.

(2) **Seconda componente.** Lungo K_1, $\{(x_k)_2\}$ è ancora limitata, quindi esiste $K_2 \subseteq K_1$ con $(x_k)_2 \to \bar{x}_2$ per $k \in K_2$. Lungo K_2 anche la prima componente tende a $\bar{x}_1$, perché K_2 dà una sottosuccessione di quella su K_1.

(3) **Le altre.** Si ripete fino alla componente n: $K_n \subseteq K_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq K_1$, e lungo K_n ogni componente i tende a $\bar{x}_i$.

(4) **Conclusione.** Sia $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^\mathsf{T}$. Per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ si ha $\|y\| \leq |y_1| + \cdots + |y_n|$. Dato $\varepsilon > 0$, per ogni i vale $|(x_k)_i - \bar{x}_i| < \varepsilon/n$ per $k \in K_n$ abbastanza grande. Con $y = x_k - \bar{x}$ ne segue $\|x_k - \bar{x}\| < \varepsilon$. Quindi $x_k \to \bar{x}$ per $k \in K_n$.

□

Corollario 2.26 – Successioni in un compatto

Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto, cioè chiuso e limitato, e $\{x_k\}$ una successione con $x_k \in E$ per ogni k. Allora esistono un insieme infinito di indici K e $\bar{x} \in E$ tali che

$$\lim_{\substack{k \in K \\ k \to \infty}} x_k = \bar{x}.$$

Solo enunciato

Teorema 2.27 – Bolzano-Weierstrass per insiemi (anche Teorema 1.5)

Ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e con infiniti punti ha almeno un punto di accumulazione.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

(1) E ha infiniti punti, quindi si sceglie una successione $\{x_k\}$ di punti di E distinti fra loro.

(2) E è limitato, quindi anche $\{x_k\}$ è limitata. Per Bolzano-Weierstrass per successioni (Teorema 2.25) esistono K e $\bar{x}$ con $x_k \to \bar{x}$ per $k \in K$.

(3) Dato $\rho > 0$, per la definizione di limite esiste k_ρ tale che $x_k \in \mathcal{B}_\rho(\bar{x})$ per ogni $k \in K$ con $k \geq k_\rho$. Questi termini sono infiniti e distinti, quindi al più uno coincide con $\bar{x}$. Così l'intorno contiene un punto di E diverso da $\bar{x}$, e $\bar{x}$ è di accumulazione per E.

□

Teorema 2.28 – Teorema ponte

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di D e $\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se, per ogni successione $\{x_k\}$ tale che

- $x_k \in D \setminus \{x_0\}$ per ogni k,
- $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$,

risulta

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \ell.$$

Solo enunciato

Continuità

Definizione 2.30 – Funzione continua

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$. La funzione f è **continua** in x_0 se

- x_0 è un punto isolato di D, oppure
- x_0 è un punto di accumulazione di D e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

È continua su un insieme $E \subseteq D$ se è continua in ogni punto di E, e si scrive $f \in C^0(E)$.

Lemma 2.31 – Le funzioni coordinate sono continue

Le funzioni "elementari" $\varphi_i : x \mapsto x_i$, con $i = 1, 2, \ldots, n$, sono continue per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Solo enunciato

Lemma 2.33 – Lipschitz implica continua

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz continua in D con costante $L > 0$, cioè

$$|f(x) - f(y)| \leq L\|x - y\| \qquad \forall x, y \in D.$$

Allora f è continua in D, cioè è continua in ogni $x_0 \in D$. Dato $\varepsilon > 0$, il raggio $\delta = \varepsilon/L$ va bene in ogni punto di D.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

1. Siano $x_0 \in D$ e $\varepsilon > 0$. Se $x \in D$ e $\|x - x_0\| < \varepsilon/L$, allora
$$|f(x) - f(x_0)| \leq L\|x - x_0\| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$
2. Se x_0 è di accumulazione per D, questa è la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; se è isolato, f è continua in x_0 per definizione.

□

Teorema 2.35 – Heine-Cantor

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto, cioè chiuso e limitato, e sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua su D. Allora f è anche uniformemente continua su D.

Solo enunciato

Calcolo dei limiti di funzioni

Teorema 2.37 – Limite mediante restrizioni

Siano $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione di D e $\ell \in \mathbb{R}^*$. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se, per ogni sottoinsieme $A \subseteq D$ che ha x_0 come punto di accumulazione, risulta

$$\lim_{x \to x_0} f|_A(x) = \ell,$$

dove $f|_A : A \to \mathbb{R}$ è la restrizione di f ad A, cioè $f|_A(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Solo enunciato

Appendice: funzioni lineari e funzioni quadratiche

Proposizione 2.39 – Funzioni lineari

Una funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è **lineare**, cioè vale $F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se e solo se esiste una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

$$F(x) = Ax \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

In particolare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lineare se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x) = c^\mathsf{T} x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$.

Solo enunciato

Proposizione 2.40 – Rappresentazione simmetrica di una forma quadratica

Per ogni $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice

$$S = \tfrac{1}{2}\left(A + A^\mathsf{T}\right)$$

è simmetrica, cioè $s_{ij} = s_{ji}$ per $i, j = 1, \ldots, n$, e $x^\mathsf{T} A x = x^\mathsf{T} S x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Quindi una forma quadratica $q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j = x^\mathsf{T} A x$ si può rappresentare con la matrice simmetrica S.

Solo enunciato

3 Differenziazione di funzioni di più variabili

Derivata per funzioni di una variabile reale

Proposizione 3.1 – Derivabile e differenziabile

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in un punto x_0 se e solo se è differenziabile in x_0. In tal caso la costante a della definizione di differenziabilità è $a = f'(x_0)$.

Solo enunciato

Derivate del primo ordine di una funzione di più variabili

Definizione 3.3 – Derivata direzionale

Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}^n$. f ha **derivata direzionale** in x lungo la direzione d se esiste finito il limite

$$Df(x, d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + t\,d) - f(x)}{t}.$$

Definizione 3.4 – Derivata parziale e gradiente

Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. f ha **derivata parziale** rispetto alla variabile x_j nel punto x se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{t}.$$

Se in x esistono le derivate parziali rispetto a tutte le variabili, il **gradiente** di f in x è il vettore colonna $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^{\mathsf{T}}$.

Proposizione 3.5 – Derivata parziale e derivate direzionali

Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, e sia e_j il j-esimo asse coordinato, cioè il vettore con 1 nella componente j e 0 nelle altre. Esiste in x la derivata parziale $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ se e solo se

(i) esiste la derivata direzionale $Df(x, e_j)$;
(ii) esiste la derivata direzionale $Df(x, -e_j)$;
(iii) risulta $Df(x, e_j) = -Df(x, -e_j)$.

In tal caso $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = Df(x, e_j)$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Il punto $x + t\, e_j$ differisce da x solo nella coordinata j, che diventa $x_j + t$, quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\, e_j) - f(x)}{t}.$$

La derivata parziale esiste se e solo se i limiti destro e sinistro del rapporto $\frac{f(x+t\, e_j)-f(x)}{t}$ esistono finiti e sono uguali.

1. **Limite destro.** Per definizione è $Df(x, e_j)$.
2. **Limite sinistro.** Con $t = -h$, $t \to 0^-$ equivale a $h \to 0^+$ e
$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(x + t\, e_j) - f(x)}{t} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h(-e_j)) - f(x)}{-h} = -Df(x, -e_j),$$
e il primo limite esiste finito se e solo se esiste $Df(x, -e_j)$.
3. ($\Rightarrow$) Se la derivata parziale esiste, i due limiti esistono e sono uguali: valgono (i)-(iii) e $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = Df(x, e_j)$.
4. ($\Leftarrow$) Se valgono (i)-(iii), per i passi 1 e 2 i limiti destro e sinistro esistono e valgono $Df(x, e_j) = -Df(x, -e_j)$: la derivata parziale esiste.

□

Definizione 3.6 – Funzione differenziabile

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è **differenziabile** in $x \in \mathbb{R}^n$ se esiste un vettore $a \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\lim_{d \to 0} \frac{f(x + d) - f(x) - a^{\mathsf{T}} d}{\|d\|} = 0.$$

Proposizione 3.7 – Differenziabile implica continua

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Allora f è continua in x_0.

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

1. Per la differenziabilità, con il gradiente come vettore della definizione (Proposizione 3.8),
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^\mathsf{T}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \qquad \text{per } x \to x_0.$$
2. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (Proposizione 1.16) $|\nabla f(x_0)^\mathsf{T}(x - x_0)| \leq \|\nabla f(x_0)\| \, \|x - x_0\|$, che tende a 0 per $x \to x_0$; anche il resto tende a 0.
3. Quindi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

□

Proposizione 3.8 – Condizione necessaria e condizione sufficiente di differenziabilità

Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

(i) **Condizione necessaria.** Se f è differenziabile in x, allora esiste $\nabla f(x)$ e il vettore a della definizione di differenziabilità è $a = \nabla f(x)$.

(ii) **Condizione sufficiente.** Se le derivate parziali di f esistono nei punti vicini a x e sono continue in x, allora f è differenziabile in x.

Solo enunciato

Proposizione – Derivata direzionale di una funzione differenziabile

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile in x, per ogni $d \in \mathbb{R}^n$ esiste la derivata direzionale di f in x lungo d e

$$Df(x, d) = \nabla f(x)^\mathsf{T} d.$$

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

Per $d = \mathbf{0}$ entrambi i membri valgono 0. Sia $d \neq \mathbf{0}$ e $t > 0$.

1. Con l'incremento $t\,d$, per la differenziabilità, con il gradiente come vettore della definizione (Proposizione 3.8), $f(x+t\,d) = f(x)+t\,\nabla f(x)^\mathsf{T} d+r(t\,d)$, con $r(t\,d)/\|t\,d\| \to 0$ per $t \to 0^+$.
2. Il rapporto della derivata direzionale è

$$\frac{f(x + t\,d) - f(x)}{t} = \nabla f(x)^\mathsf{T} d + \|d\| \, \frac{r(t\,d)}{\|t\,d\|},$$

   perché $\|t\,d\| = t\,\|d\|$.
3. Il secondo termine tende a 0, quindi il limite esiste ed è $\nabla f(x)^\mathsf{T} d$.

□

Corollario 3.11 – Funzioni di classe C^1

Sia $f : D \to \mathbb{R}$, con D sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Se f è di classe C^1 su D, cioè $f \in C^1(D)$, con il gradiente che esiste ed è continuo su D, allora f è differenziabile in ogni punto di D.

Solo enunciato

Differenziazione di un vettore di funzioni

Proposizione 3.20 – Differenziabilità di una funzione vettoriale e matrice jacobiana

Siano $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Si ricorda che g è differenziabile in x se esiste una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

$$\lim_{d \to 0} \frac{\|g(x + d) - g(x) - A\,d\|}{\|d\|} = 0.$$

(i) **Condizione necessaria.** Se g è differenziabile in x, esiste la matrice jacobiana $J(x)$ e la matrice della definizione è $A = J(x)$.

(ii) **Condizione sufficiente.** Se J esiste nei punti vicini a x ed è continua in x, allora g è differenziabile in x.

Solo enunciato

Derivate del secondo ordine di una funzione reale

Proposizione 3.25 – Funzioni due volte differenziabili e matrice hessiana

Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Si ricorda che f è due volte differenziabile in x se f è differenziabile in x ed esiste una matrice $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che

$$f(x+d) = f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}} d + \frac{1}{2}\, d^{\mathsf{T}} H\, d + \beta(x,d) \qquad \text{con} \qquad \lim_{d\to 0} \frac{\beta(x,d)}{\|d\|^2} = 0.$$

(i) **Condizione necessaria.** Se f è due volte differenziabile in x, allora ∇f esiste ed è continuo in x, esiste la matrice hessiana $\nabla^2 f(x)$, è simmetrica e $H = \nabla^2 f(x)$.

(ii) **Condizione sufficiente.** Se $\nabla^2 f$ esiste nei punti vicini a x ed è continua in x, allora f è due volte differenziabile in x.

Solo enunciato

Teorema della media e formula di Taylor

Teorema 3.1 – Teorema della media

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e convesso e $f \in C^1(D)$. Per ogni $x, y \in D$ esiste $\theta \in (0,1)$ tale che, con $z = x + \theta\,(y-x)$,

$$f(y) = f(x) + \nabla f(z)^{\mathsf{T}} (y - x).$$

Solo enunciato

Teorema 3.2 – Teorema della media in forma integrale

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\mathbb{R}^n$. Fissato $x \in \mathbb{R}^n$, per ogni $d \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere

$$f(x+d) = f(x) + \int_0^1 \nabla f(x + t\,d)^{\mathsf{T}} d \,\mathrm{d}t.$$

Analogamente, per $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 \nabla f\big(x + t\,(y-x)\big)^{\mathsf{T}} (y - x)\,\mathrm{d}t.$$

Solo enunciato

Teorema 3.3 – Teorema di Taylor

Siano $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e convesso e $f \in C^2(D)$. Per ogni $x, y \in D$ esiste $\theta \in (0,1)$ tale che, con $z = x + \theta\,(y-x)$,

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}} (y-x) + \frac{1}{2}\,(y-x)^{\mathsf{T}} \nabla^2 f(z)\,(y-x).$$

Solo enunciato

4 Convessità di insiemi e funzioni

Elementi di geometria di $\mathbb{R}^n$

Proposizione 4.2 – Condizione necessaria e sufficiente per sottospazi lineari

Un insieme non vuoto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottospazio lineare se e solo se esiste una matrice A con n colonne tale che

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbf{0}\}.$$

Solo enunciato

Proposizione 4.3 – Dimensione di un sottospazio lineare

Sia $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbf{0}\}$ un sottospazio lineare, con A una matrice con n colonne. Allora

$$\dim S = n - \operatorname{rk} A.$$

Solo enunciato

Insiemi convessi

Definizione 4.7 – Insieme convesso

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ è **convesso** se contiene il segmento fra due suoi punti qualsiasi:

$$(1-\lambda)\,x + \lambda\,y \in C \qquad \forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1].$$

Proposizione 4.8 – Convessità di un semispazio

Siano $a \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Gli insiemi

$$\{x : a^\mathsf{T} x \leq \beta\}, \quad \{x : a^\mathsf{T} x \geq \beta\}, \quad \{x : a^\mathsf{T} x < \beta\}, \quad \{x : a^\mathsf{T} x > \beta\}$$

sono convessi.

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

Sia $S = \{x : a^\mathsf{T} x \leq \beta\}$, e siano $x, y \in S$ e $\lambda \in [0,1]$.

1. Per la linearità del prodotto scalare, con $z = (1-\lambda)\,x + \lambda\,y$,
$$a^\mathsf{T} z = (1-\lambda)\,a^\mathsf{T} x + \lambda\,a^\mathsf{T} y.$$
2. $1-\lambda \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $a^\mathsf{T} x \leq \beta$ e $a^\mathsf{T} y \leq \beta$, quindi $a^\mathsf{T} z \leq (1-\lambda)\,\beta + \lambda\,\beta = \beta$, cioè $z \in S$.

Con $\geq$ si invertono le disuguaglianze. Con quelle strette, $(1-\lambda)(\beta - a^\mathsf{T} x) + \lambda(\beta - a^\mathsf{T} y) > 0$, perché è una somma di termini non negativi in cui almeno un peso è positivo e moltiplica un numero positivo. □

Proposizione 4.9 – Intersezione di insiemi convessi

Sia $\{C_i\}_{i \in I}$ una famiglia qualsiasi, anche infinita, di insiemi convessi. Allora

$$C = \bigcap_{i \in I} C_i$$

è un insieme convesso.

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

1. Siano $x, y \in C$. Allora $x, y \in C_i$ per ogni $i \in I$.
2. Ogni C_i è convesso, quindi $z = (1-\lambda)\,x + \lambda\,y \in C_i$ per ogni i e ogni $\lambda \in [0,1]$.
3. Allora z sta in tutti i C_i, cioè $z \in C$.

□

Proposizione 4.10 – Convessità di un iperpiano

Ogni iperpiano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T} x = \beta\}$, con $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq \mathbf{0}$, e $\beta \in \mathbb{R}$, è un insieme convesso.

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

H è l'intersezione di due semispazi chiusi,

$$H = \{x : a^\mathsf{T} x \geq \beta\} \cap \{x : a^\mathsf{T} x \leq \beta\},$$

convessi per la Proposizione 4.8, quindi è convesso per la Proposizione 4.9. □

Proposizione 4.11 – Convessità di un poliedro

Un poliedro di $\mathbb{R}^n$ è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi, cioè l'insieme delle soluzioni di un sistema finito di disequazioni ed equazioni lineari

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{ll} a_i^\mathsf{T} x \leq b_i, & i = 1, \ldots, m_1 \\ a_i^\mathsf{T} x \geq b_i, & i = m_1 + 1, \ldots, m_2 \\ a_i^\mathsf{T} x = b_i, & i = m_2 + 1, \ldots, m_3 \end{array} \right\}.$$

Ogni poliedro è un insieme convesso.

Solo enunciato

Proposizione 4.12 – Convessità di una palla

Siano $\|\cdot\|$ una norma qualsiasi di $\mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\rho > 0$. La palla aperta e la palla chiusa

$$\mathcal{B}_\rho(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \rho\}, \qquad \overline{\mathcal{B}}_\rho(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\| \leq \rho\}$$

sono insiemi convessi.

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

Siano $x, y \in \overline{\mathcal{B}}_\rho(\bar{x})$ e $\lambda \in [0, 1]$.

1. Aggiungendo e togliendo $\lambda\bar{x}$, $(1 - \lambda)\, x + \lambda\, y - \bar{x} = (1 - \lambda)(x - \bar{x}) + \lambda(y - \bar{x})$.
2. Per la disuguaglianza triangolare e la proprietà $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$, con $1 - \lambda$ e λ non negativi,

$$\|(1 - \lambda)\, x + \lambda\, y - \bar{x}\| \leq (1 - \lambda)\|x - \bar{x}\| + \lambda\|y - \bar{x}\| \leq (1 - \lambda)\rho + \lambda\rho = \rho.$$

Per la palla aperta le due distanze sono minori di ρ, e la combinazione con pesi $1 - \lambda$, λ è al più la maggiore delle due, quindi è minore di ρ. □

Funzioni convesse e funzioni concave

Definizione 4.13 – Funzione convessa e strettamente convessa

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e $f : S \to \mathbb{R}$. f è **convessa** su S se per ogni $x, y \in S$ e ogni $\lambda \in [0,1]$

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y);$$

è **strettamente convessa** se la disuguaglianza è stretta per ogni $x \neq y$ e ogni $\lambda \in (0,1)$. f è (strettamente) **concava** se $-f$ è (strettamente) convessa.

Proposizione 4.14 – Le norme sono convesse

Una qualsiasi norma $f(x) = \|x\|$ in $\mathbb{R}^n$ è una funzione convessa su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0,1]$. Per la disuguaglianza triangolare e la proprietà $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

$$\|(1-\lambda)\, x + \lambda\, y\| \leq |1-\lambda| \, \|x\| + |\lambda| \, \|y\| = (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\|,$$

dove i valori assoluti si tolgono perché $1-\lambda \geq 0$ e $\lambda \geq 0$. □

Proposizione 4.16 – Funzioni lineari e affini

Ogni funzione lineare $f(x) = c^{\mathsf{T}}x$, con $c \in \mathbb{R}^n$, è sia convessa sia concava su $\mathbb{R}^n$. Lo stesso vale per una funzione affine $f(x) = c^{\mathsf{T}}x + d$, con $d \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0,1]$. Per la linearità del prodotto scalare

$$f\big((1-\lambda)\, x + \lambda\, y\big) = (1-\lambda)\, c^{\mathsf{T}}x + \lambda\, c^{\mathsf{T}}y = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Vale l'uguaglianza, quindi valgono sia $\leq$ sia $\geq$. Con la costante d non cambia nulla, perché $d = (1-\lambda)\, d + \lambda\, d$. □

Convessità e concavità di funzioni differenziabili

Proposizione 4.17 – Condizione del primo ordine di convessità

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e convesso e $f \in C^1(S)$. Allora f è convessa su S se e solo se

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x) \qquad \forall x, y \in S.$$

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Condizione necessaria. Sia f convessa e siano $x, y \in S$.

1. Per $\lambda \in (0, 1]$, scrivendo $(1-\lambda)\, x + \lambda\, y = x + \lambda(y - x)$, la definizione dà $f(x + \lambda(y-x)) \leq f(x) + \lambda\big(f(y) - f(x)\big)$.
2. Si porta $f(x)$ a sinistra e si divide per $\lambda > 0$:
$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x).$$
3. Per $\lambda \to 0^+$ il primo membro tende alla derivata direzionale lungo $d = y - x$, che per f differenziabile (Corollario 3.11) vale $\nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x)$. Il secondo membro non dipende da λ, quindi $\nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x) \leq f(y) - f(x)$.

Condizione sufficiente. Siano $x, y \in S$, $\lambda \in [0, 1]$ e $z = (1 - \lambda)\, x + \lambda\, y$, che sta in S perché S è convesso.

1. L'ipotesi applicata alle coppie (z, x) e (z, y) dà
$$f(x) \geq f(z) + \nabla f(z)^{\mathsf{T}}(x - z), \qquad f(y) \geq f(z) + \nabla f(z)^{\mathsf{T}}(y - z).$$
2. Si moltiplica la prima per $1 - \lambda \geq 0$, la seconda per $\lambda \geq 0$ e si somma:
$$(1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y) \geq f(z) + \nabla f(z)^{\mathsf{T}}\big((1 - \lambda)\, x + \lambda\, y - z\big) = f(z),$$
perché $(1 - \lambda)\, x + \lambda\, y - z = \mathbf{0}$. È la definizione di convessità.

□

Proposizione 4.18 – Condizione del primo ordine di stretta convessità

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e convesso e $f \in C^1(S)$. Allora f è strettamente convessa su S se e solo se

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x) \qquad \forall x, y \in S,\ x \neq y.$$

Solo enunciato

Proposizione 4.19 – Condizione del secondo ordine di convessità

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e convesso e $f \in C^2(S)$. Allora f è convessa su S se e solo se $\nabla^2 f(x)$ è semidefinita positiva per ogni $x \in S$.

Solo enunciato

Proposizione 4.20 – Convessità di una funzione quadratica

Sia $f(x) = \frac{1}{2}\, x^\mathsf{T} Q\, x + c^\mathsf{T} x + b$, con Q matrice simmetrica $n \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$. Allora f è convessa su $\mathbb{R}^n$ se e solo se Q è semidefinita positiva.

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

Poiché Q è simmetrica, $\nabla f(x) = Q\, x + c$ e $\nabla^2 f(x) = Q$ in ogni punto, quindi $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e l'hessiana di f è Q. Basta applicare la Proposizione 4.19 con $S = \mathbb{R}^n$. □

Proposizione 4.21 – Condizione sufficiente di convessità stretta

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e convesso e $f \in C^2(S)$. Se $\nabla^2 f(x)$ è definita positiva per ogni $x \in S$, allora f è strettamente convessa su S.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Siano $x, y \in S$ con $x \neq y$.

1. Per il teorema di Taylor (Teorema 3.3), con $z = x + \theta\,(y - x)$ e $\theta \in (0, 1)$,
$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^\mathsf{T}(y - x) + \frac{1}{2}\,(y - x)^\mathsf{T} \nabla^2 f(z)\,(y - x).$$
2. $z \in S$ perché S è convesso, quindi $\nabla^2 f(z)$ è definita positiva e, poiché $y - x \neq \mathbf{0}$, l'ultimo termine è positivo.
3. Allora $f(y) > f(x) + \nabla f(x)^\mathsf{T}(y - x)$, e f è strettamente convessa per la Proposizione 4.18.

□

Proposizione 4.22 – Convessità stretta di una funzione quadratica

Sia $f(x) = \frac{1}{2}\, x^\mathsf{T} Q\, x + c^\mathsf{T} x + b$, con Q matrice simmetrica $n \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$. Allora f è strettamente convessa su $\mathbb{R}^n$ se e solo se Q è definita positiva.

Solo enunciato

Proposizione 4.23 – Condizione del primo ordine di concavità

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto, sia $f : C \to \mathbb{R}$ e si supponga che ∇f sia continuo su C. Allora f è concava su C se e solo se, per tutte le coppie di punti $x, y \in C$, si ha

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x).$$

Solo enunciato

Proposizione 4.24 – Condizione del primo ordine di stretta concavità

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto, sia $f : C \to \mathbb{R}$ e si supponga che ∇f sia continuo su C. Allora f è strettamente concava su C se e solo se, per tutte le coppie di punti $x, y \in C$ con $x \neq y$, si ha

$$f(y) < f(x) + \nabla f(x)^{\mathsf{T}}(y - x).$$

Solo enunciato

Proposizione 4.25 – Condizione del secondo ordine di concavità

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e convesso e $f \in C^2(S)$. Allora f è concava su S se e solo se $\nabla^2 f(x)$ è semidefinita negativa per ogni $x \in S$.

Solo enunciato

Proposizione 4.26 – Condizione sufficiente di concavità stretta

Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso aperto, sia $f : C \to \mathbb{R}$ e si supponga che la matrice hessiana $\nabla^2 f$ sia continua e definita negativa su C. Allora f è strettamente concava su C.

Solo enunciato

Insiemi convessi definiti mediante equazioni e disequazioni

Proposizione 4.27 – Insieme definito da una disequazione convessa

Sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora l'insieme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$$

è convesso.

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

Siano $x, y \in S$ e $\lambda \in [0, 1]$. Per la convessità di g

$$g\big((1-\lambda)\,x + \lambda\,y\big) \leq (1-\lambda)\,g(x) + \lambda\,g(y) \leq 0,$$

perché i pesi sono non negativi e $g(x)$, $g(y)$ non positivi. Il punto $(1-\lambda)\,x + \lambda\,y$ appartiene quindi a S. □

Proposizione 4.28 – Insieme definito da più disequazioni convesse

Siano $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni convesse. Allora l'insieme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$$

è convesso.

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

S è l'intersezione degli insiemi $S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0\}$, convessi per la Proposizione 4.27, quindi è convesso per la Proposizione 4.9. □

Proposizione 4.29 – Insieme definito da disequazioni convesse ed equazioni affini

Siano $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni convesse, e $a_j \in \mathbb{R}^n$, $b_j \in \mathbb{R}$ per $j = 1, \dots, p$. Allora l'insieme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \dots, m;\ \ a_j^\top x = b_j,\ j = 1, \dots, p\}$$

è convesso.

Dimostrazione dubbia

Dimostrazione

Gli insiemi $S_i = \{x : g_i(x) \leq 0\}$ sono convessi per la Proposizione 4.27. Gli insiemi $\{x : a_j^\top x = b_j\}$ sono iperpiani, convessi per la Proposizione 4.10, se $a_j \neq \mathbf{0}$, e altrimenti sono $\mathbb{R}^n$ o $\emptyset$: tutti convessi. S è l'intersezione di tutti questi insiemi, quindi è convesso per la Proposizione 4.9. □

Appendice: elementi di algebra lineare

Proposizione 4.31 – Matrici simmetriche e autovalori

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica, quindi con autovalori reali. A è

- definita positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori sono > 0 (< 0);
- semidefinita positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori sono ≥ 0 (≤ 0);
- indefinita se e solo se ha un autovalore positivo e uno negativo.

Solo enunciato

Proposizione 4.32 – Condizioni necessarie sugli elementi diagonali

Sia Q una matrice reale e simmetrica $n \times n$. Allora:

(i) se Q è definita positiva (negativa), tutti gli elementi diagonali di Q sono necessariamente positivi (negativi);

(ii) se Q è semidefinita positiva (negativa), tutti gli elementi diagonali di Q sono necessariamente non negativi (non positivi);

(iii) se Q è semidefinita positiva oppure semidefinita negativa e $q_{ii} = 0$, deve essere necessariamente

$$q_{ij} = 0,\ j = 1, \dots, n; \qquad q_{hi} = 0,\ h = 1, \dots, n.$$

Solo enunciato

Proposizione 4.33 – Semidefinitezza e minori principali

Sia Q una matrice reale e simmetrica $n \times n$. Allora Q è semidefinita positiva se e solo se tutti i minori principali di Q, cioè i determinanti delle sottomatrici ottenute scegliendo gli stessi indici di riga e di colonna, sono non negativi.

Solo enunciato

Proposizione 4.34 – Criterio di Sylvester

Sia Q una matrice reale e simmetrica $n \times n$, e siano Δ_i, per $i = 1, \dots, n$, i minori principali di ordine i, cioè i determinanti delle sottomatrici formate dalle prime i righe e dalle prime i colonne di Q. Allora:

1. Q è definita positiva se e solo se $\Delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$;
2. Q è definita negativa se e solo se $(-1)^i \Delta_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Solo enunciato

5 Massimi e minimi di funzioni di più variabili

Definizione 5.1-5.2 – Punto di minimo globale e locale

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : S \to \mathbb{R}$. Un punto $x^* \in S$ è un **punto di minimo globale** di f su S se

$$f(x^*) \leq f(x) \qquad \forall x \in S.$$

Il valore $f(x^*)$ è il **minimo globale**. Il punto è di **minimo globale stretto** se $f(x^*) < f(x)$ per ogni $x \in S$ con $x \neq x^*$.

Un punto $x^* \in S$ è un **punto di minimo locale** di f su S se esiste $\rho > 0$ tale che

$$f(x^*) \leq f(x) \qquad \forall x \in \mathcal{B}_\rho(x^*) \cap S,$$

con $\mathcal{B}_\rho(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x^*\| < \rho\}$. È di **minimo locale stretto** se $f(x^*) < f(x)$ per ogni $x \in \mathcal{B}_\rho(x^*) \cap S$ con $x \neq x^*$.

Le definizioni di massimo, globale e locale, stretto e non, si ottengono invertendo le disuguaglianze.

Coincidenza di minimi locali e globali nel caso convesso

Proposizione 5.5 – Punti di minimo nel caso convesso

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e f convessa su S.

- Ogni punto di minimo locale di f su S è di minimo globale.
- L'insieme dei punti di minimo globale di f su S è convesso.

Solo enunciato

Proposizione 5.6 – Unicità del punto di minimo

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e f strettamente convessa su S. Se x^* è un punto di minimo locale di f su S, allora x^* è l'unico punto di minimo locale e l'unico punto di minimo globale di f su S.

Solo enunciato

Condizioni di esistenza della soluzione

Proposizione 5.7 – Teorema di Weierstrass

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e compatto e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua su S. Allora esistono $x_{\min}, x_{\max} \in S$ tali che

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \qquad \forall x \in S.$$

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Basta il minimo, perché il massimo di f è il minimo della funzione continua $-f$. Sia $L = \inf_{x \in S} f(x)$, con $L = -\infty$ se f non è limitata inferiormente su S.

1. Per la definizione di estremo inferiore esiste una successione $\{x_k\}$ con $x_k \in S$ e $f(x_k) \to L$.
2. S è compatto, quindi, per il Corollario 2.26, esistono una sottosuccessione $\{x_k\}_{k \in K}$ e un punto $x^* \in S$ con $\lim_{k \in K,\, k \to \infty} x_k = x^*$. Il limite sta in S perché S è chiuso, ma la convergenza vale solo lungo la sottosuccessione.
3. f è continua in x^*, quindi $f(x_k) \to f(x^*)$ per $k \in K$, $k \to \infty$.
4. Per $k \in K$ vale anche $f(x_k) \to L$, perché è una sottosuccessione di una successione che tende a L. Per l'unicità del limite $f(x^*) = L$.
5. Allora L è finito ed è un minorante dei valori di f su S: $f(x^*) = L \leq f(x)$ per ogni $x \in S$. Quindi x^* è un punto di minimo globale.

□

Condizioni di ottimalità nel caso di problemi non vincolati: direzioni di discesa

Definizione 5.8 – Direzione di discesa

Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Un vettore $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq \mathbf{0}$, è una **direzione di discesa** per f in x se esiste $\bar{t} > 0$ tale che

$$f(x + t\,d) < f(x) \qquad \forall t \in (0, \bar{t}\,).$$

Proposizione 5.9 – Condizione di discesa del primo ordine

Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}^n$ un vettore non nullo.

(a) Se f è differenziabile in x e
$$\nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0,$$
allora d è una direzione di discesa per f in x.

(b) Se $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ è convessa su una palla aperta $\mathcal{B}_\rho(x)$ e d è una direzione di discesa per f in x, allora $\nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

(a)

1. Per la derivata direzionale di una funzione differenziabile $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{f(x + t\,d) - f(x)}{t} = \nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0$.
2. Per la permanenza del segno esiste $\bar{t} > 0$ tale che $\dfrac{f(x + t\,d) - f(x)}{t} < 0$ per ogni $t \in (0, \bar{t}\,)$. Poiché $t > 0$, il numeratore è negativo, cioè $f(x + t\,d) < f(x)$, e d è una direzione di discesa.

(b)

1. Per $t > 0$ abbastanza piccolo $f(x + t\,d) < f(x)$ e, riducendo t, anche $t\,\|d\| < \rho$, cioè $x + t\,d \in \mathcal{B}_\rho(x)$.
2. La palla $\mathcal{B}_\rho(x)$ è aperta e convessa (Proposizione 4.12) e f è su di essa C^1 e convessa, quindi il criterio del primo ordine (Proposizione 4.17) dà $f(x+t\,d) \geq f(x)+t\,\nabla f(x)^\mathsf{T} d$.
3. Insieme alla discesa, $f(x) + t\,\nabla f(x)^\mathsf{T} d \leq f(x + t\,d) < f(x)$, quindi $t\,\nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0$. Poiché $t > 0$, $\nabla f(x)^\mathsf{T} d < 0$.

□

Proposizione – L'antigradiente è una direzione di discesa

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x \in \mathbb{R}^n$ con $\nabla f(x) \neq \mathbf{0}$. Allora l'**antigradiente** $d = -\nabla f(x)$ è una direzione di discesa per f in x.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Si ha $d \neq \mathbf{0}$ e

$$\nabla f(x)^{\mathsf{T}} d = -\nabla f(x)^{\mathsf{T}} \nabla f(x) = -\|\nabla f(x)\|^2 < 0.$$

Quindi d è una direzione di discesa per la Proposizione 5.9(a). □

Proposizione 5.11 – Condizione di discesa del secondo ordine

Siano $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\nabla f(x)^{\mathsf{T}} d = 0 \qquad \text{e} \qquad d^{\mathsf{T}} \nabla^2 f(x)\, d < 0.$$

Allora d è una direzione di discesa per f in x.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Si ha $d \neq \mathbf{0}$, perché $d^{\mathsf{T}} \nabla^2 f(x)\, d \neq 0$.

1. $f \in C^2$, quindi è due volte differenziabile (Proposizione 3.25(ii)). Per $t > 0$

$$f(x + t\,d) = f(x) + t\,\nabla f(x)^{\mathsf{T}} d + \frac{1}{2} t^2\, d^{\mathsf{T}} \nabla^2 f(x)\, d + \beta(x, t\,d),$$

   con $\beta(x, t\,d)/t^2 \to 0$ per $t \to 0^+$, perché $\|t\,d\|^2 = t^2 \|d\|^2$.
2. Il termine del primo ordine è nullo. Dividendo per $t^2 > 0$

$$\frac{f(x + t\,d) - f(x)}{t^2} = \frac{1}{2}\, d^{\mathsf{T}} \nabla^2 f(x)\, d + \frac{\beta(x, t\,d)}{t^2}.$$

3. Il primo addendo è negativo e non dipende da t, mentre il secondo tende a 0: per t abbastanza piccolo $|\beta(x, t\,d)|/t^2 < \frac{1}{2} |d^{\mathsf{T}} \nabla^2 f(x)\, d|$, quindi il secondo membro è negativo.
4. Allora $f(x + t\,d) < f(x)$ per ogni $t > 0$ abbastanza piccolo, quindi d è una direzione di discesa.

□

Condizioni di minimo locale

Proposizione 5.12 – Condizione necessaria di minimo locale

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se $x^* \in \mathbb{R}^n$ è un punto di minimo locale di f su $\mathbb{R}^n$, non esiste una direzione di discesa per f in x^*.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Per assurdo, sia d di discesa in x^*, con il suo $\bar{t}$, e sia $\mathcal{B}_\rho(x^*)$ la palla della definizione di minimo locale.

1. Si sceglie $\hat{t}$ con $0 < \hat{t} < \bar{t}$ e $\hat{t}\,\|d\| < \rho$.
2. Allora $x^* + \hat{t}\,d \in \mathcal{B}_\rho(x^*)$ e, per la discesa, $f(x^* + \hat{t}\,d) < f(x^*)$.
3. Questo contraddice $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathcal{B}_\rho(x^*)$.

□

Proposizione 5.13 – Condizione necessaria del primo ordine

Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e x^* un punto di minimo locale di f su $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\nabla f(x^*) = \mathbf{0},$$

cioè x^* è un punto stazionario di f.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

Per assurdo, sia $\nabla f(x^*) \neq \mathbf{0}$.

1. L'antigradiente $d = -\nabla f(x^*)$ dà $\nabla f(x^*)^\mathsf{T} d = -\|\nabla f(x^*)\|^2 < 0$.
2. Quindi d è una direzione di discesa in x^* per la Proposizione 5.9.
3. Questo contraddice la Proposizione 5.12.

□

Proposizione 5.14 – Condizione necessaria del secondo ordine

Siano $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e x^* un punto di minimo locale di f su $\mathbb{R}^n$. Allora

(a) $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$;
(b) $\nabla^2 f(x^*)$ è semidefinita positiva, cioè $y^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^*)\, y \geq 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

La (a) è la condizione del primo ordine (Proposizione 5.13). Per la (b), per assurdo $\nabla^2 f(x^*)$ non sia semidefinita positiva.

1. Per la definizione esiste d con $d^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^*)\, d < 0$.
2. Per la (a), $\nabla f(x^*)^\mathsf{T} d = 0$.
3. Per la discesa del secondo ordine (Proposizione 5.11) d è di discesa in x^*, contro la Proposizione 5.12.

□

Proposizione 5.15 – Condizione sufficiente: convessità locale

Siano $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$. Se $\nabla^2 f(x)$ è semidefinita positiva per ogni x di una palla $\mathcal{B}_\rho(\bar{x})$, allora $\bar{x}$ è un punto di minimo locale di f su $\mathbb{R}^n$.

Solo enunciato

Proposizione 5.16 – Condizione sufficiente del secondo ordine

Siano $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$. Se $\nabla^2 f(\bar{x})$ è definita positiva, allora $\bar{x}$ è un punto di minimo locale di f su $\mathbb{R}^n$.

Solo enunciato

Condizioni di minimo globale nel caso convesso

Proposizione 5.17 – Condizione di minimo globale: caso convesso

Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ convessa su $\mathbb{R}^n$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora $\bar{x}$ è un punto di minimo globale di f se e solo se

$$\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione da fare

Dimostrazione

1. **Solo se.** Un punto di minimo globale è di minimo locale, quindi $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$ per la Proposizione 5.13.
2. **Se.** $\mathbb{R}^n$ è aperto e convesso e f è C^1 e convessa, quindi il criterio del primo ordine (Proposizione 4.17) dà, per ogni $y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^{\mathsf{T}}(y - \bar{x}) = f(\bar{x}).$$

Quindi $\bar{x}$ è di minimo globale.

□

Proposizione 5.17, seconda parte – Caso strettamente convesso

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile su $\mathbb{R}^n$ e strettamente convessa. Se $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$, allora x^* è l'unico punto stazionario di f e costituisce anche l'unico punto di minimo globale di f.

Solo enunciato

Proposizione 5.18 – Minimizzazione di una funzione quadratica

Sia $f(x) = \frac{1}{2}\, x^{\mathsf{T}} Q\, x + c^{\mathsf{T}} x$, con Q simmetrica e $c \in \mathbb{R}^n$. Allora:

(a) f ha un punto di minimo globale se e solo se Q è semidefinita positiva ed esiste x^* tale che $Q\, x^* + c = \mathbf{0}$;

(b) f ha un unico punto di minimo globale se e solo se Q è definita positiva.

Solo enunciato

Condizioni di massimo locale

Proposizione 5.19 – Massimo locale: condizione necessaria del primo ordine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile nell'intorno di un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* è un punto di massimo locale non vincolato di f, allora x^* è un punto stazionario di f, cioè $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$.

Solo enunciato

Proposizione 5.20 – Massimo locale: condizione necessaria del secondo ordine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte continuamente differenziabile nell'intorno di un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se x^* è un punto di massimo locale non vincolato di f, allora

(a) $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$;
(b) $y^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^*)\, y \leq 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, cioè $\nabla^2 f(x^*)$ è semidefinita negativa.

Solo enunciato

Proposizione 5.21 – Massimo locale: condizione sufficiente (concavità locale)

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte continuamente differenziabile in un intorno di $x^* \in \mathbb{R}^n$. Se

(a) $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$;
(b) esiste una palla $\mathcal{B}_\rho(x^*)$ in cui la matrice hessiana è semidefinita negativa, cioè $y^\mathsf{T} \nabla^2 f(x)\, y \leq 0$ per ogni $x \in \mathcal{B}_\rho(x^*)$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^n$,

allora x^* è un punto di massimo locale non vincolato di f.

Solo enunciato

Proposizione 5.22 – Massimo locale: condizione sufficiente del secondo ordine

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ due volte continuamente differenziabile in un intorno di $x^* \in \mathbb{R}^n$. Si supponga che

(a) $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$;
(b) la matrice hessiana sia definita negativa in x^*, cioè $y^\mathsf{T} \nabla^2 f(x^*)\, y < 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq \mathbf{0}$.

Allora x^* è un punto di massimo locale stretto e inoltre esistono $\rho > 0$ e $\mu > 0$ tali che

$$f(x^*) \geq f(x) + \frac{\mu}{2} \|x - x^*\|^2 \qquad \text{per ogni } x \text{ con } \|x - x^*\| < \rho.$$

Solo enunciato

Condizioni di massimo globale nel caso di funzione concava

Proposizione 5.23 – Massimo globale: caso concavo

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente differenziabile su $\mathbb{R}^n$ e concava. Allora x^* è un punto di massimo globale di f su $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$. Inoltre, se f è strettamente concava su $\mathbb{R}^n$ e $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$, allora x^* è l'unico punto stazionario di f e costituisce anche l'unico punto di massimo globale di f.

Solo enunciato

Proposizione 5.24 – Massimizzazione di una funzione quadratica

Sia $q(x) = \frac{1}{2}\, x^\mathsf{T} Q\, x + c^\mathsf{T} x$, con Q simmetrica e $c \in \mathbb{R}^n$. Allora:

(a) q ammette un punto di massimo se e solo se Q è semidefinita negativa ed esiste x^* tale che $Q\, x^* + c = \mathbf{0}$;

(b) q ammette un unico punto di massimo globale se e solo se Q è definita negativa.

Solo enunciato

Riepilogo

Dimostrazioni da fare

Proposizione 1.36 – Caratterizzazione degli insiemi chiusi 4
Teorema 2.25 – Bolzano-Weierstrass per successioni 7
Teorema 2.27 – Bolzano-Weierstrass per insiemi (anche Teorema 1.5) 8
Lemma 2.33 – Lipschitz implica continua 9
Proposizione 3.5 – Derivata parziale e derivate direzionali 12
Proposizione 4.17 – Condizione del primo ordine di convessità 20
Proposizione 4.21 – Condizione sufficiente di convessità stretta 21
Proposizione 5.7 – Teorema di Weierstrass 27
Proposizione 5.9 – Condizione di discesa del primo ordine 28
Proposizione – L'antigradiente è una direzione di discesa 29
Proposizione 5.11 – Condizione di discesa del secondo ordine 29
Proposizione 5.12 – Condizione necessaria di minimo locale 30
Proposizione 5.13 – Condizione necessaria del primo ordine 30
Proposizione 5.14 – Condizione necessaria del secondo ordine 31
Proposizione 5.17 – Condizione di minimo globale: caso convesso 32

Dimostrazioni dubbie

Proposizione 3.7 – Differenziabile implica continua · · · · · 13
Proposizione – Derivata direzionale di una funzione differenziabile · · · · · 14
Proposizione 4.8 – Convessità di un semispazio · · · · · 17
Proposizione 4.9 – Intersezione di insiemi convessi · · · · · 17
Proposizione 4.10 – Convessità di un iperpiano · · · · · 18
Proposizione 4.12 – Convessità di una palla · · · · · 18
Proposizione 4.14 – Le norme sono convesse · · · · · 19
Proposizione 4.16 – Funzioni lineari e affini · · · · · 19
Proposizione 4.20 – Convessità di una funzione quadratica · · · · · 21
Proposizione 4.27 – Insieme definito da una disequazione convessa · · · · · 23
Proposizione 4.28 – Insieme definito da più disequazioni convesse · · · · · 23
Proposizione 4.29 – Insieme definito da disequazioni convesse ed equazioni affini · · · · · 24

Solo enunciato

Teorema 1.1 – Esistenza degli estremi superiore e inferiore · · · · · 1
Teorema 1.2 – Caratterizzazione dell'estremo superiore · · · · · 1
Teorema 1.3 – Caratterizzazione dell'estremo inferiore · · · · · 2
Proposizione 1.16 – Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz · · · · · 2
Proprietà 1.30 – Unione e intersezione di insiemi aperti · · · · · 3
Proprietà 1.31 – Intersezione e unione di insiemi chiusi · · · · · 3
Proposizione 2.10 – Limite di una funzione vettoriale e limiti delle componenti · · · · · 5
Proposizione 2.14 – Successioni limitate e componenti · · · · · 6
Teorema 2.24 – Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$ · · · · · 6
Corollario 2.26 – Successioni in un compatto · · · · · 7
Teorema 2.28 – Teorema ponte · · · · · 8
Lemma 2.31 – Le funzioni coordinate sono continue · · · · · 9
Teorema 2.35 – Heine-Cantor · · · · · 9
Teorema 2.37 – Limite mediante restrizioni · · · · · 9
Proposizione 2.39 – Funzioni lineari · · · · · 10
Proposizione 2.40 – Rappresentazione simmetrica di una forma quadratica · · · · · 10
Proposizione 3.1 – Derivabile e differenziabile · · · · · 10
Proposizione 3.8 – Condizione necessaria e condizione sufficiente di differenziabilità · · · · · 13
Corollario 3.11 – Funzioni di classe C^1 · · · · · 14
Proposizione 3.20 – Differenziabilità di una funzione vettoriale e matrice jacobiana · · · · · 14
Proposizione 3.25 – Funzioni due volte differenziabili e matrice hessiana · · · · · 15
Teorema 3.1 – Teorema della media · · · · · 15

Teorema 3.2 – Teorema della media in forma integrale · · · · · 15
Teorema 3.3 – Teorema di Taylor · · · · · 15
Proposizione 4.2 – Condizione necessaria e sufficiente per sottospazi lineari · · · · · 16
Proposizione 4.3 – Dimensione di un sottospazio lineare · · · · · 16
Proposizione 4.11 – Convessità di un poliedro · · · · · 18
Proposizione 4.18 – Condizione del primo ordine di stretta convessità · · · · · 20
Proposizione 4.19 – Condizione del secondo ordine di convessità · · · · · 21
Proposizione 4.22 – Convessità stretta di una funzione quadratica · · · · · 21
Proposizione 4.23 – Condizione del primo ordine di concavità · · · · · 22
Proposizione 4.24 – Condizione del primo ordine di stretta concavità · · · · · 22
Proposizione 4.25 – Condizione del secondo ordine di concavità · · · · · 22
Proposizione 4.26 – Condizione sufficiente di concavità stretta · · · · · 22
Proposizione 4.31 – Matrici simmetriche e autovalori · · · · · 25
Proposizione 4.32 – Condizioni necessarie sugli elementi diagonali · · · · · 25
Proposizione 4.33 – Semidefinitezza e minori principali · · · · · 25
Proposizione 4.34 – Criterio di Sylvester · · · · · 25
Proposizione 5.5 – Punti di minimo nel caso convesso · · · · · 26
Proposizione 5.6 – Unicità del punto di minimo · · · · · 26
Proposizione 5.15 – Condizione sufficiente: convessità locale · · · · · 31
Proposizione 5.16 – Condizione sufficiente del secondo ordine · · · · · 31
Proposizione 5.17, seconda parte – Caso strettamente convesso · · · · · 32
Proposizione 5.18 – Minimizzazione di una funzione quadratica · · · · · 32
Proposizione 5.19 – Massimo locale: condizione necessaria del primo ordine · · · · · 33
Proposizione 5.20 – Massimo locale: condizione necessaria del secondo ordine · · · · · 33
Proposizione 5.21 – Massimo locale: condizione sufficiente (concavità locale) · · · · · 33
Proposizione 5.22 – Massimo locale: condizione sufficiente del secondo ordine · · · · · 33
Proposizione 5.23 – Massimo globale: caso concavo · · · · · 34
Proposizione 5.24 – Massimizzazione di una funzione quadratica · · · · · 34