

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 1 · Prof. Marco Sciandrone

Capitolo 11: Derivate di funzioni di più variabili

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Derivata e differenziabilità in $\mathbb{R}$ · Rette e semirette
Derivata direzionale · Derivate parziali e gradiente · Derivate parziali e continuità

Indice

1	Derivata e differenziabilità in $\mathbb{R}$	1
2	Rette e semirette in $\mathbb{R}^n$	2
3	Derivata direzionale	3
4	Derivate parziali e gradiente	3
5	Derivate parziali e derivate direzionali	4
6	Derivate parziali e continuità	5
7	Esercizi	7
8	Soluzioni	9

1 Derivata e differenziabilità in $\mathbb{R}$

Definizione – Derivata prima

Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. f è **derivabile** in x_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale, la **derivata prima** di f in x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La seconda forma viene dalla prima con $x = x_0 + h$. Il limite si può studiare: il rapporto è definito per $x \neq x_0$, e x_0 è di accumulazione per $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ (Capitolo 3).

Definizione – o piccolo

Siano f e g due funzioni che tendono a 0 per $x \rightarrow x_0$. Si dice che f è un **o piccolo** di g per $x \rightarrow x_0$, e si scrive $f = o(g)$, se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Entrambe tendono a 0, ma f più rapidamente di g .

Definizione – Funzione differenziabile in una variabile

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **differenziabile** in x_0 se esiste una costante $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

La funzione $\hat{f}(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ è affine in x (Capitolo 6) e lineare nell'incremento $x - x_0$. L'errore $f(x) - \hat{f}(x)$ è $o(x - x_0)$: vicino a x_0 l'approssimazione è buona quanto si vuole, e f si può sostituire con $\hat{f}$. Per questo una funzione differenziabile si dice anche **linearizzabile** in x_0 . Sostituire f con una funzione affine è il primo passo di molti algoritmi, come il metodo di Newton (Capitolo 7).

Proposizione – Derivabile e differenziabile

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 se e solo se è differenziabile in x_0 . In tal caso

$$a = f'(x_0)$$

e $\hat{f}$ è l'approssimazione lineare del Capitolo 7.

Dimostrazione

Con $h = x - x_0$, la differenziabilità con costante a equivale a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = 0.$$

1. ($\Rightarrow$) Con $a = f'(x_0)$ il rapporto è $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$, che tende a $f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.
2. ($\Leftarrow$) Il rapporto incrementale è $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a + \frac{o(h)}{h}$, che tende ad a : f è derivabile e $f'(x_0) = a$.

□

Proposizione – Derivabile implica continua

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 , allora è continua in x_0 .

Dimostrazione

1. f è differenziabile, quindi $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$.
2. Per $x \rightarrow x_0$ sia $f'(x_0)(x - x_0)$ sia $o(x - x_0)$ tendono a 0, quindi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

□

La derivabilità è sufficiente per la continuità, ma non necessaria: $|x|$ è continua in 0 e non è derivabile, perché il rapporto incrementale vale 1 per $h > 0$ e -1 per $h < 0$.

2 Rette e semirette in $\mathbb{R}^n$

Definizione – Retta e semiretta

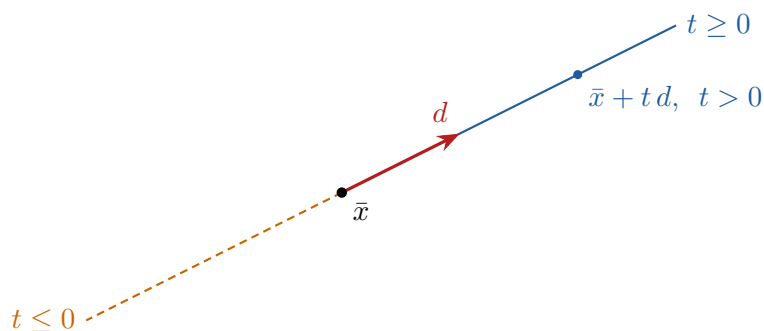
Siano $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$.

- La **retta** per $\bar{x}$ parallela a d è

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x - \bar{x} = td, t \in \mathbb{R}\}.$$

- Con $t \geq 0$ si ottiene la **semiretta** che parte da $\bar{x}$ nel verso di d ; con $t \leq 0$ quella nel verso opposto.

I punti della retta sono $x = \bar{x} + td$: il vettore $x - \bar{x}$ è parallelo a d .



La retta per $\bar{x}$ parallela a d : la semiretta continua è quella nel verso di d , quella tratteggiata nel verso opposto.

3 Derivata direzionale

Definizione – Derivata direzionale

Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}^n$. f ha **derivata direzionale** in x lungo la direzione d se esiste finito il limite

$$Df(x, d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + t d) - f(x)}{t}.$$

Il rapporto confronta la variazione di f con lo spostamento t lungo la semiretta che parte da x nel verso di d . Per questo t tende a 0 solo da destra. Il limite può non esistere.

4 Derivate parziali e gradiente

Definizione – Derivata parziale

Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. f ha **derivata parziale** rispetto alla variabile x_j nel punto x se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{t}.$$

Varia solo x_j , le altre variabili restano fisse. È la derivata prima di f come funzione della sola x_j , quindi dipende anche dai valori delle variabili fissate.

Definizione – Gradiente

Se in x esistono le derivate parziali di f rispetto a tutte le variabili, il **gradiente** di f in x è il vettore colonna

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Il gradiente ha tante componenti quante sono le variabili di f . Ogni componente si calcola con le regole della derivata prima, trattando come costanti le altre variabili.

Esempio – Gradiente di una funzione di tre variabili

Sia $f(x) = x_1^3 - 3x_1x_2 + x_1x_2x_3$, con $x \in \mathbb{R}^3$.

1. **Rispetto a x_1** , con x_2 e x_3 costanti: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 3x_1^2 - 3x_2 + x_2x_3$.
2. **Rispetto a x_2** : $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = -3x_1 + x_1x_3$.
3. **Rispetto a x_3** : x_3 compare solo in $x_1x_2x_3$, con coefficiente x_1x_2 , quindi $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = x_1x_2$.

Nel punto $\bar{x} = (1, 2, -1)$ si sostituiscono le coordinate:

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 3 - 6 - 2 \\ -3 - 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Altri due calcoli sono negli Esercizi 1 e 2.

5 Derivate parziali e derivate direzionali

Sia $e_j \in \mathbb{R}^n$ il versore del j -esimo asse coordinato, con 1 in posizione j e 0 altrove. Il punto della derivata parziale è $x + te_j$:

$$x + te_j = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j + t \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}.$$

La derivata parziale è un limite per $t \rightarrow 0$ da entrambi i lati, la derivata direzionale solo da destra. Servono quindi due direzioni, e_j e $-e_j$.

Proposizione – Derivata parziale e derivate direzionali

Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Esiste $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ se e solo se

- (i) esiste la derivata direzionale $Df(x, e_j)$;
- (ii) esiste la derivata direzionale $Df(x, -e_j)$;
- (iii) risulta

$$Df(x, e_j) = -Df(x, -e_j)$$

In tal caso $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = Df(x, e_j)$.

Dimostrazione

La derivata parziale esiste se e solo se i limiti destro e sinistro del rapporto $\frac{f(x + t e_j) - f(x)}{t}$ esistono finiti e sono uguali.

1. **Limite destro.** Per definizione è $Df(x, e_j)$.
2. **Limite sinistro.** Con $t = -h$, $t \rightarrow 0^-$ equivale a $h \rightarrow 0^+$ e

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x + t e_j) - f(x)}{t} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + h(-e_j)) - f(x)}{-h} = -Df(x, -e_j),$$

e il primo limite esiste finito se e solo se esiste $Df(x, -e_j)$.

3. ($\Rightarrow$) Se la derivata parziale esiste, i due limiti esistono e sono uguali: valgono (i)-(iii) e $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = Df(x, e_j)$.
4. ($\Leftarrow$) Se valgono (i)-(iii), per i passi 1 e 2 i limiti destro e sinistro esistono e valgono $Df(x, e_j) = -Df(x, -e_j)$: la derivata parziale esiste.

□

6 Derivate parziali e continuità

In una variabile la derivabilità in x_0 implica la continuità in x_0 (Sezione 1). In $\mathbb{R}^2$ l'analogo atteso sarebbe: se in (x_0, y_0) esistono le due derivate parziali, f è continua in (x_0, y_0) . È falso.

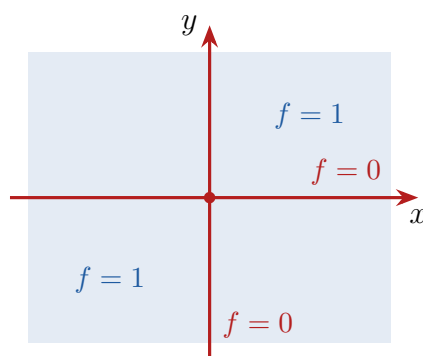
Esempio – Derivate parziali senza continuità

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. **Non è continua in $(0, 0)$.** Sull'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$, che ha $(0, 0)$ come punto di accumulazione, f vale 1, quindi $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_A(x, y) = 1$. Ma $f(0, 0) = 0$: per il teorema delle restrizioni (Capitolo 9) f non tende a $f(0, 0)$.
2. **Le derivate parziali esistono.** Sugli assi f vale 0, quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0. \end{aligned}$$



f vale 0 sugli assi (in rosso) e 1 altrove. Le derivate parziali in $(0, 0)$ guardano solo gli assi; la continuità guarda tutti i punti vicini.

Le derivate parziali dicono come varia f lungo gli assi coordinati, e nulla sugli altri punti vicini a $(0, 0)$. Quindi in $\mathbb{R}^n$ l'esistenza del gradiente non garantisce la continuità, e non può dare da sola un'approssimazione affine di f come la differenziabilità in una variabile.

Riepilogo

- **Derivata prima:** $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, finito.
- **Differenziabile in $\mathbb{R}$:** $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$; equivale a derivabile, con $a = f'(x_0)$, e implica la continuità.
- **Retta e semiretta:** $x = \bar{x} + t d$ con $t \in \mathbb{R}$, oppure $t \geq 0$.
- **Derivata direzionale:** $Df(x, d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+td)-f(x)}{t}$.
- **Derivata parziale:** limite per $t \rightarrow 0$ di $\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t}$; si calcola con le altre variabili costanti.
- **Gradiente:** $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$, colonna delle derivate parziali.
- **Parziale e direzionali:** $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ esiste se e solo se esistono $Df(x, \pm e_j)$ e $Df(x, e_j) = -Df(x, -e_j)$.
- **Continuità:** in $\mathbb{R}^n$ le derivate parziali possono esistere in un punto in cui f non è continua.

7 Esercizi

Esercizio 1 – Gradiente di un esponenziale

Calcolare il gradiente di $f(x_1, x_2) = e^{x_1-x_2}$ nel punto $\bar{x} = (1, 2)$.

Soluzione a pagina 9 →

Esercizio 2 – Una funzione con gradiente assegnato

Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^6$ un punto qualsiasi. Definire una funzione $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Soluzione a pagina 9 →

Esercizio 3 – Primo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 3 dei compiti A-D, adattato

Siano $\tilde{a}\tilde{b}$ le ultime due cifre del proprio numero di matricola, e $a = \max\{1, \tilde{a}\}$, $b = \max\{1, \tilde{b}\}$. Sia $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} a & q \\ q & b \end{pmatrix},$$

con $q = 2$ nel compito A, $q = 1$ nel B, $q = 3$ nel C, $q = 5$ nel D. Usando Q definire una funzione quadratica (determinandone il vettore c)

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c^\top \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tale che il gradiente nell'origine $\nabla f(0, 0)$ sia pari al vettore (a, b) .

[Soluzione a pagina 9 →](#)

Esercizio 4 – Appello del 20/01/2026, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 3, adattato

Si consideri la seguente funzione di due variabili reali:

$$f(x, y) = ((x - 1)^2 + y^2 - 1)(x - 2).$$

Calcolare il vettore gradiente di f .

[Soluzione a pagina 10 →](#)

8 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Gradiente di un esponenziale

f ha due variabili, quindi $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^2$. Con x_2 costante la derivata dell'esponenziale dà $e^{x_1-x_2}$ per la derivata dell'argomento, che è 1; con x_1 costante la derivata dell'argomento è -1 :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1-x_2} \\ -e^{x_1-x_2} \end{pmatrix}, \quad \nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} e^{-1} \\ -e^{-1} \end{pmatrix}.$$

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 7](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Una funzione con gradiente assegnato

Conviene una funzione il cui gradiente non dipenda dal punto: una funzione lineare $f(x) = c^\top x$ (Capitolo 6) con c uguale al gradiente richiesto,

$$f(x) = x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 6x_6.$$

La derivata rispetto a x_j è il coefficiente di x_j , perché le altre variabili sono costanti. Quindi $\nabla f(x) = (1, -1, 2, 3, 1, 6)^\top$ per ogni x , e in particolare in $\bar{x}$.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 7](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Primo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 3 dei compiti A-D, adattato

1. **La funzione.** Con $c = (c_1, c_2)^\top$, svolgendo i prodotti,

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (ax^2 + 2qxy + by^2) + c_1x + c_2y.$$

2. **Le derivate parziali**, con l'altra variabile costante:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ax + qy + c_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = qx + by + c_2.$$

3. **Nell'origine** $\nabla f(0, 0) = (c_1, c_2)^\top$. Deve valere (a, b) , quindi

$$c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Il risultato non dipende da q : nell'origine la parte quadratica ha derivate parziali nulle.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 8](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Appello del 20/01/2026, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 3, adattato

f è il prodotto di $g(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - 1$ e di $x - 2$.

1. **Rispetto a x** , con y costante e la regola del prodotto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x - 1)(x - 2) + (x - 1)^2 + y^2 - 1.$$

2. **Rispetto a y** : $x - 2$ è una costante, e g ha derivata $2y$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y(x - 2).$$

Quindi

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} (x - 1)^2 + y^2 - 1 + 2(x - 1)(x - 2) \\ 2y(x - 2) \end{pmatrix}.$$

Ad esempio $\nabla f(0, 0) = (1 - 1 + 4, 0)^\top = (4, 0)^\top$.

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 8](#)