Appunti di Programmazione Matematica

Canale 2 · Prof. Giampaolo Liuzzi

Capitolo 9: Programmazione lineare

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

---

Argomenti: Convessità della regione ammissibile · Soluzione grafica · Vertici · Vincoli attivi · Teorema fondamentale della PL

Indice

1 Problemi di programmazione lineare **1**

2 Soluzione grafica: tre casi **2**

3 Vertici di un poliedro **4**

4 Da un punto a un vertice senza peggiorare **7**

5 Il teorema fondamentale della PL **11**

6 Esercizi **13**

7 Soluzioni **16**

1 Problemi di programmazione lineare

Definizione – Problema di programmazione lineare

Un problema di programmazione matematica $\min f(x)$ con vincoli $g_i(x) \le 0$, $i = 1, \dots, m$, è di **programmazione lineare** (PL) se l'obiettivo è lineare e i vincoli sono affini: $f(x) = c^\mathsf{T} x$ e $g_i(x) = a_i^\mathsf{T} x - b_i$. In forma matriciale

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \; c^\mathsf{T} x \qquad \text{con} \qquad Ax \le b,$$

dove $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ha per righe gli a_i^T e $b \in \mathbb{R}^m$. La regione ammissibile è $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$.

Ogni riga $a_i^\mathsf{T} x \le b_i$ è un vincolo del problema. Un vincolo con $\ge$ si riporta a questa forma moltiplicando per -1: $x_1 + 3x_2 \ge 4$ diventa $-x_1 - 3x_2 \le -4$. Le prove d'esame scrivono spesso $Ax \ge b$, e tutto il capitolo vale anche in quella forma.

Proposizione – Convessità nella PL

1. Un semispazio chiuso $\{x \in \mathbb{R}^n : a^\mathsf{T} x \le \beta\}$ è un insieme convesso.
2. La regione ammissibile $S = \{x : Ax \le b\}$ è convessa, perché è l'intersezione di m semispazi chiusi.
3. La funzione lineare $c^\mathsf{T} x$ è contemporaneamente convessa e concava su $\mathbb{R}^n$.

Senza dimostrazione nel corso; dimostrazione aggiunta qui

Dimostrazione

1. Siano x, y nel semispazio e $\lambda \in [0,1]$. Allora $a^\mathsf{T}\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) = (1-\lambda)a^\mathsf{T} x + \lambda a^\mathsf{T} y \le (1-\lambda)\beta + \lambda\beta = \beta$.
2. Ogni semispazio è convesso per il punto 1, e un'intersezione finita di convessi è convessa (Capitolo 07).
3. Per la linearità $c^\mathsf{T}\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) = (1-\lambda)c^\mathsf{T} x + \lambda c^\mathsf{T} y$. La disuguaglianza della convessità e quella della concavità valgono quindi entrambe, con l'uguaglianza.

□

Un problema di PL è quindi sia un problema di ottimizzazione convessa sia uno di ottimizzazione concava. Per i problemi concavi vale il risultato seguente.

Osservazione – Minimo di una funzione concava

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso e f concava su S. Se il problema $\min_{x \in S} f(x)$ ha un minimo globale x^* e f non è costante su S, allora x^* è un punto di frontiera di S.

Osservazione – Che cosa ne segue per la PL

- $c^\mathsf{T} x$ è convessa su S convesso: ogni minimo locale è globale (Capitolo 07).
- $c^\mathsf{T} x$ è concava: se non è costante su S, il minimo globale, quando esiste, sta sulla frontiera di S.

Il minimo va quindi cercato sulla frontiera di S, che si studia nelle Sezioni 3–5.

2 Soluzione grafica: tre casi

Con due variabili la soluzione si legge sul piano, con il metodo delle rette di livello del Capitolo 01:

1. disegnare S come intersezione dei semipiani dei vincoli;
2. disegnare alcune rette di livello $c^\mathsf{T} x = k$, tutte parallele fra loro e ortogonali a c;
3. spostarle nel verso di $-c$, dove $z = c^\mathsf{T} x$ diminuisce: l'ultimo punto di S toccato è la soluzione.

Il vettore c è il gradiente di $c^\mathsf{T} x$, quindi $-c$ è l'antigradiente, la direzione in cui z decresce più rapidamente.

Osservazione – Tre casi possibili nel piano

1. S non vuoto e limitato: il minimo esiste e sta sulla frontiera di S.
2. S illimitato, ma z non decresce lungo le direzioni in cui S si estende: il minimo esiste e sta sulla frontiera di S.
3. S illimitato e z decresce indefinitamente su S: il problema è illimitato inferiormente.

Nel caso 1, S è chiuso, perché i vincoli sono disuguaglianze larghe con funzioni continue, e limitato, quindi compatto: il minimo esiste per il teorema di Weierstrass (Capitolo 06). Gli esempi seguenti mostrano un problema per ciascun caso (Figura 1).

Esempio – Regione limitata

$$\min\ z = -3x_1 - 2x_2 \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 4 \quad (1)\\ x_1 + 3x_2 &\le 9 \quad (2)\\ x_1 &\le 3 \quad (3)\\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

S è un pentagono. I punti d'angolo e i valori di z sono

punto d'angolo	$(0,0)$	$(0,3)$	$(3/2, 5/2)$	$(3,0)$	$(3,1)$
z	0	-6	$-19/2$	-9	-11

Il minimo è $x^* = (3,1)$, con $z^* = -11$: l'incrocio delle rette (1) e (3).

L'incrocio delle rette (2) e (3) è il punto $(3,2)$, che non soddisfa il vincolo (1): $3{+}2 = 5 > 4$. Un incrocio di due rette dei vincoli può quindi cadere fuori da S, e prima di usarlo va controllato su tutti gli altri vincoli.

Esempio – Regione illimitata, minimo finito

$$\min\ z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4 \quad (1)\\ x_1 + 3x_2 &\ge 6 \quad (2)\\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

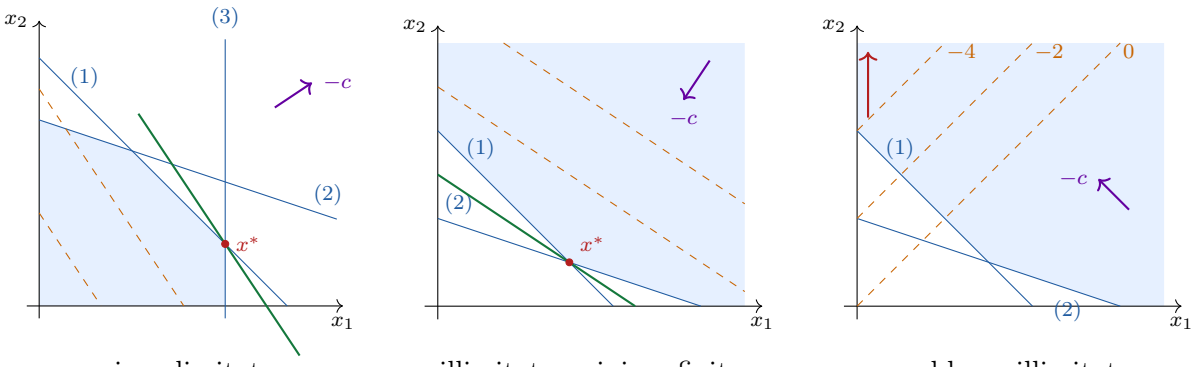
S si estende senza limite verso l'alto e verso destra, ma z cresce in quelle direzioni. I punti d'angolo sono $(0,4)$, $(3,1)$ e $(6,0)$, con $z = 12, 9, 12$. Il minimo è $x^* = (3,1)$, con $z^* = 9$.

Esempio – Problema illimitato

Con la stessa regione dell'esempio precedente si minimizza $z = x_1 - x_2$. Lungo la semiretta $(0,4) + t(0,1)$, $t \ge 0$, che sta in S, si ha $z = -4 - t \to -\infty$. Il problema è illimitato inferiormente, anche se nei punti d'angolo z vale -4, 2 e 6.

Osservazione – Regione illimitata e problema illimitato

Una regione ammissibile illimitata non rende illimitato il problema. Il problema è illimitato quando z decresce indefinitamente su punti di S, come nel terzo esempio. Nel secondo esempio S è illimitata, ma il minimo esiste.



regione limitata | illimitata, minimo finito | problema illimitato

Figura 1: I tre casi. A sinistra la retta di livello verde $z = -11$ tocca la regione limitata solo in $x^* = (3, 1)$. Al centro, con $z = 2x_1 + 3x_2$, la retta verde $z = 9$ tocca la regione illimitata in $x^* = (3, 1)$, e le rette arancioni hanno $z = 15$ e $z = 21$. A destra, con $z = x_1 - x_2$, le rette di livello salgono verso valori sempre più bassi lungo la freccia rossa.

Osservazione – Ottimi non unici

Se le rette di livello sono parallele a un lato di S e z decresce verso quel lato, l'ultima retta che tocca S contiene tutto il lato. Allora tutti i punti del lato sono minimi globali, con lo stesso valore di z. Anche i due estremi del lato sono minimi globali.

In tutti gli esempi con minimo, il minimo è un punto d'angolo di S, all'incrocio di due rette dei vincoli. Questi punti si chiamano vertici.

3 Vertici di un poliedro

Definizione – Poliedro

Un **poliedro** è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

La regione ammissibile di un problema di PL è quindi un poliedro. In $\mathbb{R}^2$ un poliedro è un poligono, anche illimitato, come la regione del secondo esempio.

Definizione – Vertice

Un punto $\bar{x} \in P$ è un **vertice** di P se non esistono $x, y \in P$, con $x \neq y$, tali che $\bar{x}$ appartenga al segmento aperto (x, y):

$$\bar{x} = (1 - \lambda)x + \lambda y, \qquad \lambda \in (0, 1).$$

Un punto interno di P, o un punto interno a un lato, sta dentro un segmento con estremi in P; un vertice no (Figura 2). La definizione però non si usa per calcolare: chiederebbe di controllare tutte le coppie di punti di P, e oltre tre variabili P non si disegna.

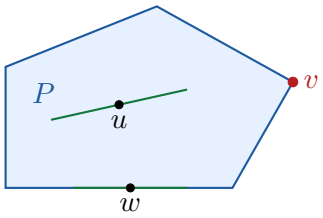


Figura 2: Il punto interno u e il punto w interno a un lato stanno dentro un segmento verde con estremi in P. Per il vertice v un tale segmento non esiste.

Definizione – Vincoli attivi

Sia $\bar{x} \in P$. Un vincolo è **attivo** in $\bar{x}$ se è soddisfatto con l'uguaglianza. L'insieme degli indici dei vincoli attivi è

$$I(\bar{x}) = \{i : a_i^\mathsf{T} \bar{x} = b_i\}.$$

Teorema – Caratterizzazione dei vertici

Sia $\bar{x} \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Le tre affermazioni seguenti sono equivalenti:

1. $\bar{x}$ è un vertice di P;
2. $\operatorname{rg}\{a_i^\mathsf{T} : i \in I(\bar{x})\} = n$, cioè fra i vincoli attivi in $\bar{x}$ ce ne sono n linearmente indipendenti;
3. il sistema lineare $a_i^\mathsf{T} x = b_i$, $i \in I(\bar{x})$, ha soluzione unica.

Senza dimostrazione

Per decidere se un punto dato è un vertice:

1. si controlla che $\bar{x}$ appartenga a P;
2. si trovano i vincoli attivi $I(\bar{x})$;
3. si calcola il rango della matrice delle righe a_i^T, $i \in I(\bar{x})$: $\bar{x}$ è un vertice se e solo se il rango è n.

Per trovare *tutti* i vertici si rovescia il procedimento:

1. si scelgono n vincoli fra gli m e si scrivono con l'uguaglianza;
2. si risolve il sistema $n \times n$ ottenuto: si tiene solo una soluzione unica;
3. si controlla che la soluzione soddisfi tutti gli altri vincoli: in questo caso è un vertice.

Ripetendo per tutte le scelte si ottengono tutti e soli i vertici.

Osservazione – Il controllo sugli altri vincoli

Il passo 3 non si salta. Un sistema con soluzione unica dà un punto all'incrocio di n iperpiani, ma il punto può violare un vincolo escluso dalla scelta, come l'incrocio $(3, 2)$ del primo esempio. Chiamare vertice un punto che non sta in P è un errore grave.

Osservazione – Vincoli di uguaglianza

Un vincolo di uguaglianza $a^{\mathsf{T}}x = \beta$ equivale alle due disuguaglianze $a^{\mathsf{T}}x \leq \beta$ e $a^{\mathsf{T}}x \geq \beta$, ed è attivo in ogni punto di P. Nella ricerca dei vertici entra quindi in ogni scelta di n vincoli, e le scelte da provare diminuiscono.

Gli Esercizi 1–5 applicano i due procedimenti in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathbb{R}^4$.

Proposizione – Numero massimo di vertici

Un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ha al più

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

vertici. In particolare il numero dei vertici è finito, ed è zero se $m < n$.

Dimostrato nel corso

Dimostrazione

1. Per la caratterizzazione, ogni vertice è la soluzione unica del sistema formato da n vincoli attivi linearmente indipendenti.
2. Una scelta di n vincoli dà al più un punto, e scelte diverse possono dare lo stesso punto.
3. Le scelte di n righe fra m, senza ripetizioni e senza ordine, sono $\binom{m}{n}$: al numeratore n fattori, divisi per $n!$ perché l'ordine non conta.

Se $m < n$ non si possono scegliere n vincoli diversi, e nessun punto ha rango n. □

Esempio – Limite superiore e vertici effettivi

- Nel primo esempio della sezione 2 ci sono $m = 5$ vincoli e $n = 2$: al più $\binom{5}{2} = 10$ vertici, ma i vertici sono 5.
- Nel secondo, $m = 4$ e $n = 2$: al più $\binom{4}{2} = 6$, ma i vertici sono 3.
- Un semipiano $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ ha $m = 1 < n = 2$: è un poliedro senza vertici.
- Un poliedro di $\mathbb{R}^{12}$ descritto da 10 disuguaglianze non ha vertici, perché $m = 10 < n = 12$.

4 Da un punto a un vertice senza peggiorare

Teorema – Lemma: verso un vertice

Siano $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ e il problema $\min\{c^\mathsf{T} x : x \in P\}$. Si suppone che:

- P non sia vuoto e non contenga rette;
- il problema non sia illimitato inferiormente.

Sia $\bar{x} \in P$ con $\operatorname{rg}\{a_i^\mathsf{T} : i \in I(\bar{x})\} = r < n$. Allora esiste $y \in P$ tale che:

1. $c^\mathsf{T} y \leq c^\mathsf{T} \bar{x}$;
2. in y è attivo un vincolo che non è attivo in $\bar{x}$, e restano attivi tutti quelli attivi in $\bar{x}$;
3. $\operatorname{rg}\{a_i^\mathsf{T} : i \in I(y)\} \geq r + 1$.

Dimostrato nel corso solo in parte

Una retta è contenuta in P se esistono $\tilde{x} \in P$ e $d \neq 0$ con $\tilde{x} + td \in P$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Le ipotesi del lemma sono importanti quanto la tesi: senza di esse la costruzione si può bloccare.

Dimostrazione

Si dimostrano i punti 1 e 2.

1. *Direzione.* Il sistema omogeneo $a_i^\mathsf{T} d = 0$, $i \in I(\bar{x})$, ha rango $r < n$, quindi ha soluzioni $d \neq 0$. Cambiando eventualmente il segno di d, si ha $c^\mathsf{T} d \leq 0$.
2. *Semiretta.* Sui punti $x(t) = \bar{x} + td$, $t \geq 0$:

$$a_i^\mathsf{T} x(t) = b_i + t\, a_i^\mathsf{T} d = b_i \quad (i \in I(\bar{x})), \qquad c^\mathsf{T} x(t) = c^\mathsf{T} \bar{x} + t\, c^\mathsf{T} d \leq c^\mathsf{T} \bar{x}.$$

   I vincoli attivi restano attivi e l'obiettivo non aumenta.
3. *Vincoli non attivi.* Se $a_i^\mathsf{T} d \leq 0$, il vincolo i resta soddisfatto per ogni $t \geq 0$. Se $a_i^\mathsf{T} d > 0$, il vincolo diventa attivo per $t = (b_i - a_i^\mathsf{T} \bar{x})/(a_i^\mathsf{T} d) > 0$, e oltre è violato. Ci si ferma al primo:

$$t^* = \min \left\{ \frac{b_i - a_i^\mathsf{T} \bar{x}}{a_i^\mathsf{T} d} : a_i^\mathsf{T} d > 0 \right\}, \qquad y = \bar{x} + t^* d.$$

4. *Esistenza di t^*.* Se nessun vincolo avesse $a_i^\mathsf{T} d > 0$ e fosse $c^\mathsf{T} d < 0$, tutta la semiretta starebbe in P con $c^\mathsf{T} x(t) \to -\infty$: il problema sarebbe illimitato inferiormente, contro l'ipotesi. Il caso $c^\mathsf{T} d = 0$ è trattato nell'osservazione seguente.
5. *Conclusione.* $y \in P$ per la scelta di t^*, e $c^\mathsf{T} y \leq c^\mathsf{T} \bar{x}$ per il passo 2. Il vincolo j che realizza il minimo è attivo in y e non in $\bar{x}$, perché $t^* > 0$.

□

Osservazione – Il caso $c^\mathsf{T} d = 0$ e il rango

- Se $c^\mathsf{T} d = 0$ e nessun vincolo ha $a_i^\mathsf{T} d > 0$, si usa $-d$, che ha ancora $c^\mathsf{T}(-d) = 0$. Se nemmeno per $-d$ c'è un vincolo con $a_i^\mathsf{T}(-d) > 0$, allora $a_i^\mathsf{T} d = 0$ per ogni i, e tutta la retta $\bar{x} + td$, $t \in \mathbb{R}$, sta in P. Questo è escluso dall'ipotesi che P non contenga rette.
- Il nuovo vincolo j ha $a_j^\mathsf{T} d > 0$, mentre $a_i^\mathsf{T} d = 0$ per ogni $i \in I(\bar{x})$. Quindi a_j non è combinazione lineare degli a_i, $i \in I(\bar{x})$, e il rango in y è almeno $r + 1$: è il punto 3.

Osservazione – Corollario: da un punto qualsiasi a un vertice

Sotto le ipotesi del lemma, da ogni $x \in P$ si arriva, applicando il lemma al più n volte, a un vertice x^* con $c^\mathsf{T} x^* \le c^\mathsf{T} x$.

Dimostrato nel corso

Infatti ogni applicazione aumenta di almeno 1 il rango dei vincoli attivi, che non supera n. Quando il rango vale n il punto è un vertice, per la caratterizzazione. Si ottiene una sequenza finita di punti, non una successione come nel metodo del gradiente.

Esempio – La costruzione nel piano

Sia P il quadrilatero dei vincoli

$$x_2 \ge 1 \;\; (1), \qquad x_1 - x_2 \le 2 \;\; (2), \qquad x_1 + x_2 \le 6 \;\; (3), \qquad -x_1 + x_2 \le 1 \;\; (4),$$

con vertici $(0,1)$, $(3,1)$, $(4,2)$ e $(5/2, 7/2)$, e si minimizzi $c^\mathsf{T} x = -x_1 - 2x_2$ (Figura 3, a sinistra).

1. $\bar{x} = (3/2, 2)$ è interno: $I(\bar{x}) = \emptyset$, $r = 0$. Ogni d va bene; si sceglie l'antigradiente $d^0 = -c = (1, 2)$, con $c^\mathsf{T} d^0 = -5$.
2. Hanno $a_i^\mathsf{T} d^0 > 0$ i vincoli (3) e (4): $t^* = \min\{(1 - 1/2)/1,\ (6 - 7/2)/3\} = 1/2$, dato dal (4). Si arriva in $y^1 = (2, 3)$, con $I(y^1) = \{4\}$.
3. In y^1 serve $-d_1 + d_2 = 0$, cioè $d = \pm(1, 1)$. Si sceglie $d^1 = (1, 1)$, con $c^\mathsf{T} d^1 = -3 \le 0$: ci si muove lungo il lato (4).
4. Ora solo il (3) ha $a_3^\mathsf{T} d^1 = 2 > 0$: $t^* = (6 - 5)/2 = 1/2$ e $y^2 = (5/2, 7/2)$, con $I(y^2) = \{3, 4\}$ e rango $2 = n$: un vertice.

	punto	$I(\cdot)$	rango	$c^\mathsf{T} x$
$\bar{x}$	$(3/2, 2)$	$\emptyset$	0	$-11/2$
y^1	$(2, 3)$	$\{4\}$	1	-8
y^2	$(5/2, 7/2)$	$\{3, 4\}$	2	$-19/2$



Figura 3: La costruzione del lemma sullo stesso poliedro. A sinistra si parte da $\bar{x}$ lungo l'antigradiente fino al vincolo (4), poi lungo il lato (4) fino al vertice y^2. A destra il lato (3) è parallelo alle rette di livello: da y^1 entrambi i versi hanno $c^\mathsf{T} d = 0$ e portano al vertice y^2 o al vertice $y^{2\prime}$.

Esempio – Il caso $c^\mathsf{T} d = 0$

Sullo stesso P si minimizzi $c^\mathsf{T} x = -x_1 - x_2$ (Figura 3, a destra). Da $\bar{x} = (3/2, 2)$, con $c^\mathsf{T} \bar{x} = -7/2$, lungo $d^0 = -c = (1, 1)$ si arriva in $y^1 = (11/4, 13/4)$ sul lato (3), con $c^\mathsf{T} y^1 = -6$.

- In y^1 le direzioni con $a_3^\mathsf{T} d = 0$ sono $d = \pm(1, -1)$, e per entrambe $c^\mathsf{T} d = 0$.
- Con $d^1 = (1, -1)$ si arriva al vertice $y^2 = (4, 2)$; con $-d^1$ al vertice $y^{2\prime} = (5/2, 7/2)$. Entrambi hanno $c^\mathsf{T} x = -6$.

Le rette di livello sono parallele al lato (3), e tutti i punti del lato sono minimi globali, con valore -6.

5 Il teorema fondamentale della PL

Teorema – Teorema fondamentale della programmazione lineare

Si consideri il problema $\min\{c^\mathsf{T}x : Ax \leq b\}$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, e si supponga che $P = \{x : Ax \leq b\}$ non contenga rette. Allora accade una e una sola delle tre affermazioni seguenti:

1. $P = \emptyset$: il problema è inammissibile;
2. il problema è illimitato inferiormente;
3. il problema ha soluzione ottima, e almeno una soluzione ottima è un vertice di P.

Dimostrato nel corso

Dimostrazione

I tre casi si escludono a vicenda: con $P = \emptyset$ non ci sono punti, e un problema illimitato inferiormente non ha minimo. Si suppone allora che $P \neq \emptyset$ e che il problema non sia illimitato inferiormente: sono le ipotesi del lemma.

1. *Vertici.* Per il corollario della sezione 4, da un punto di P si raggiunge un vertice, quindi P ha vertici. Sono finiti (sezione 3); siano $x_1^*, \dots, x_R^*$, ordinati in modo che
$$c^\mathsf{T}x_1^* \leq c^\mathsf{T}x_2^* \leq \cdots \leq c^\mathsf{T}x_R^*.$$
2. *Un punto qualsiasi.* Sia $x \in P$. Per il corollario esiste un vertice x_i^* con $c^\mathsf{T}x_i^* \leq c^\mathsf{T}x$; se x è già un vertice, $x_i^* = x$.
3. *Confronto.* x_1^* è il migliore dei vertici, quindi
$$c^\mathsf{T}x_1^* \leq c^\mathsf{T}x_i^* \leq c^\mathsf{T}x.$$

Questo vale per ogni $x \in P$, quindi x_1^* è un minimo globale ed è un vertice. □

Osservazione – Tre casi invece di quattro

Fra i quattro esiti di un problema di minimo (Capitolo 06), nella PL non accade mai il terzo: un estremo inferiore finito che non è raggiunto. Un problema di PL è inammissibile, oppure illimitato inferiormente, oppure ha minimo.

Osservazione – L'ipotesi senza rette

L'ipotesi serve per il vertice. Il semipiano $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ contiene rette e non ha vertici (sezione 3). Il problema $\min\{x_1 : x \in P\}$ ha come minimi globali tutti i punti della retta $x_1 = 0$, ma nessuno di essi è un vertice.

Il teorema riduce la ricerca del minimo a un insieme finito di punti, i vertici, anche se P ne contiene infiniti. Il numero dei vertici può però essere enorme, quindi calcolarli tutti non è un metodo pratico.

Riepilogo

- **PL**: $\min c^\mathsf{T} x$ con $Ax \leq b$; S è convessa, $c^\mathsf{T} x$ è convessa e concava: ogni minimo locale è globale e sta sulla frontiera.
- **Tre casi grafici**: S limitata, minimo; S illimitata, minimo o problema illimitato; regione illimitata non vuol dire problema illimitato.
- **Vertice**: $\bar{x} \in P$ che non sta in nessun segmento aperto (x, y) con $x, y \in P$, $x \neq y$.
- **Caratterizzazione**: $\bar{x}$ vertice $\iff \operatorname{rg}\{a_i^\mathsf{T} : i \in I(\bar{x})\} = n$, con $I(\bar{x})$ gli indici dei vincoli attivi.
- **Calcolo**: n vincoli all'uguaglianza, soluzione unica, controllo di tutti gli altri vincoli.
- **Numero**: al più $\binom{m}{n}$ vertici; nessuno se $m < n$.
- **Lemma**: senza rette e non illimitato, da $\bar{x}$ con rango $r < n$ a y con rango $\geq r + 1$ e $c^\mathsf{T} y \leq c^\mathsf{T} \bar{x}$; in al più n passi un vertice.
- **Teorema fondamentale**: senza rette, inammissibile, illimitato, oppure minimo in un vertice.

Teoremi e proposizioni: dimostrati e non

Dimostrati nel corso

Proposizione – Numero massimo di vertici 6
Teorema – Lemma: verso un vertice (in parte) 7
Corollario – Da un punto qualsiasi a un vertice 9
Teorema – Teorema fondamentale della programmazione lineare 11

Senza dimostrazione nel corso

Proposizione – Convessità nella PL (dimostrazione aggiunta) 1
Teorema – Caratterizzazione dei vertici 5

6 Esercizi

Esercizio 1 – Il tetraedro

Determinare tutti i vertici di

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\ (1),\ x_2 \geq 0\ (2),\ x_3 \geq 0\ (3),\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3\ (4)\}.$$

Soluzione a pagina 16 →

Esercizio 2 – Il prisma

Determinare tutti i vertici di

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\ (1),\ x_2 \geq 0\ (2),\ x_1 + x_2 \leq 2\ (3),\ x_3 \geq 0\ (4),\ x_3 \leq 3\ (5)\}.$$

Soluzione a pagina 16 →

Esercizio 3 – Un poliedro con sette vincoli

Sia

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2,\ 0 \leq x_3 \leq 2,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5\},$$

con i vincoli numerati $x_1 \geq 0$ (1), $x_2 \geq 0$ (2), $x_3 \geq 0$ (3), $x_1 \leq 2$ (4), $x_2 \leq 2$ (5), $x_3 \leq 2$ (6), $x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$ (7).

(a) Quanti vertici può avere al più P?
(b) Stabilire se le scelte $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$ e $\{4, 5, 6\}$ danno vertici.
(c) Determinare tutti i vertici.

Soluzione a pagina 16 →

Esercizio 4 – Un vincolo di uguaglianza

Determinare tutti i vertici di

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 4\ (1),\ x_1 \geq 0\ (2),\ x_2 \geq 0\ (3),\ x_3 \geq 0\ (4),\ x_1 \leq 2\ (5)\}.$$

Soluzione a pagina 17 →

Esercizio 5 – Vertici in $\mathbb{R}^4$

Sia

$$P = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\ (1),\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 1\ (2),\ x \geq 0\},$$

con $x_1 \geq 0$ (3), $x_2 \geq 0$ (4), $x_3 \geq 0$ (5), $x_4 \geq 0$ (6). Stabilire se sono vertici di P i punti

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione a pagina 17 →

Esercizio 6 – Vertici e minimo di una regione limitata

Per il problema

$$\min\ z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \begin{aligned} &x_1 + x_2 \geq 2\ (1), \quad x_1 - x_2 \leq 2\ (2), \\ &x_1 \leq 4\ (3), \quad x_2 \leq 3\ (4), \quad x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

dire quanti vertici può avere al più la regione ammissibile, determinarli e trovare il minimo.

Soluzione a pagina 18 →

Esercizio 7 – Secondo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti A e D, esercizio 1

In $\mathbb{R}^2$ è dato l'insieme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - \tau y \leq 3,\ x + 3y \geq 4,\ x \geq 0\},$$

con $\tau \in \mathbb{R}$ un parametro reale.

(a) Stabilire, motivando la risposta, se S è un insieme convesso.

(b) Stabilire, motivando la risposta, per quali valori di τ il punto $(1, 1)$ è vertice di S.

(c) Per $\tau = 1$ stabilire se esiste un vertice di S distinto da $(1, 1)$. In caso affermativo, calcolarne le componenti.

Soluzione a pagina 18 →

Esercizio 8 – Appelli del 23/02 e dell'11/07/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 3, adattato

Dato il poliedro $P \subset \mathbb{R}^3$ descritto da

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \qquad x_1 + x_3 \leq 2, \qquad x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0,$$

elencare tutti i vertici di P, dettagliando la risposta.

Soluzione a pagina 19 →

Esercizio 9 – Appelli del 23/02, 11/07 e 16/09/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 7

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \geq b\}$ con $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ e $b \in \mathbb{R}^2$. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

(a) P ha certamente $n - m = 1$ vertici.
(b) P ha certamente $n + m = 5$ vertici.
(c) P non ha vertici.
(d) P ha esattamente 2 vertici.

Soluzione a pagina 19 →

Esercizio 10 – Appelli del 23/02, 11/07 e 16/09/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 10

Sia $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, con A matrice reale $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, la regione ammissibile di un problema di PL di minimizzazione. Dire se ciascuna affermazione è vera o falsa.

(a) Esiste sempre un vertice di P che è l'ottimo del problema.
(b) Se il problema ammette ottimo e P non contiene rette, allora una soluzione ottima è certamente un vertice di P.
(c) Se il problema ammette ottimo, allora una soluzione ottima è certamente un vertice di P.
(d) Esiste sempre una soluzione ottima del problema.

Soluzione a pagina 19 →

7 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Il tetraedro

$m = 4$, $n = 3$: al più $\binom{4}{3} = 4$ vertici, una scelta per ogni vincolo escluso.

- $\{1, 2, 3\}$: $x = (0, 0, 0)$; il vincolo (4) dà $0 \leq 3$. Vertice.
- $\{2, 3, 4\}$: $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = 3$, cioè $(3, 0, 0)$; il (1) dà $3 \geq 0$. Vertice.
- $\{1, 3, 4\}$: $(0, 3, 0)$; il (2) dà $3 \geq 0$. Vertice.
- $\{1, 2, 4\}$: $(0, 0, 3)$; il (3) dà $3 \geq 0$. Vertice.

I vertici sono 4, quanti il limite: l'origine e i tre punti sugli assi. P è la piramide a base triangolare con questi vertici.

← *Torna all'Esercizio 1, pagina 13*

Soluzione dell'Esercizio 2 – Il prisma

$m = 5$, $n = 3$: al più $\binom{5}{3} = 10$ vertici.

scelta	sistema	esito
$\{1, 2, 3\}$	$x_1 = x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 2$	incompatibile
$\{1, 2, 4\}$	$(0, 0, 0)$	vertice
$\{1, 2, 5\}$	$(0, 0, 3)$	vertice
$\{1, 3, 4\}$	$(0, 2, 0)$	vertice
$\{1, 3, 5\}$	$(0, 2, 3)$	vertice
$\{2, 3, 4\}$	$(2, 0, 0)$	vertice
$\{2, 3, 5\}$	$(2, 0, 3)$	vertice
$\{1, 4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$	$x_3 = 0$ e $x_3 = 3$	incompatibile

Ogni punto trovato soddisfa i due vincoli esclusi. I vertici sono 6, contro il limite 10: P è un prisma a base triangolare di altezza 3.

← *Torna all'Esercizio 2, pagina 13*

Soluzione dell'Esercizio 3 – Un poliedro con sette vincoli

(a) $\binom{7}{3} = 35$.

(b)

- $\{1, 2, 3\}$: l'origine, che soddisfa tutti gli altri vincoli. Vertice.
- $\{2, 3, 4\}$: $(2, 0, 0)$; gli altri vincoli danno $2 \geq 0$, $0 \leq 2$, $0 \leq 2$, $2 \leq 5$. Vertice.

- $\{4,5,6\}$: $(2,2,2)$, ma $2+2+2=6>5$ viola il (7). Non è un vertice.

(c) P è il cubo $[0,2]^3$ tagliato dal piano $x_1+x_2+x_3=5$, che stacca il vertice $(2,2,2)$ del cubo.

- Dei vertici del cubo restano i 7 con somma delle coordinate al più 5, tutti tranne $(2,2,2)$.
- Il vincolo (7) con due vincoli fra (4), (5), (6) dà $(2,2,1)$, $(2,1,2)$ e $(1,2,2)$, che soddisfano gli altri vincoli.

Le altre scelte danno sistemi incompatibili o punti fuori da P: i vertici sono 10.

← *Torna all'Esercizio 3, pagina 13*

Soluzione dell'Esercizio 4 – Un vincolo di uguaglianza

Il vincolo (1) è attivo in ogni punto di P, quindi entra in ogni scelta: restano le coppie fra (2)–(5), cioè $\binom{4}{2}=6$ scelte.

scelta	punto	esito
$\{1,2,3\}$	$(0,0,4)$	vertice
$\{1,2,4\}$	$(0,4,0)$	vertice
$\{1,2,5\}$	$x_1=0$ e $x_1=2$	incompatibile
$\{1,3,4\}$	$(4,0,0)$	viola il (5)
$\{1,3,5\}$	$(2,0,2)$	vertice
$\{1,4,5\}$	$(2,2,0)$	vertice

I vertici sono 4. P è la parte del triangolo $x_1+x_2+x_3=4$, $x\geq 0$, con $x_1\leq 2$: una figura piana in $\mathbb{R}^3$.

← *Torna all'Esercizio 4, pagina 13*

Soluzione dell'Esercizio 5 – Vertici in $\mathbb{R}^4$

Tutti e tre sono in P: le due uguaglianze danno $1+3=4$ e $1=1$; $3+1=4$ e $1=1$; $7/2+1/2=4$ e $2\cdot 1/2=1$, e le componenti sono non negative. I vincoli (1) e (2) sono sempre attivi; dei vincoli di segno sono attivi quelli delle componenti nulle.

Il punto p. $I(p)=\{1,2,5,6\}$ e la matrice delle righe attive è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le ultime due righe permettono di annullare la terza e la quarta colonna nelle prime due righe senza cambiare il rango. Resta il blocco delle colonne di x_1 e x_2, con determinante $1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$. Il rango è $4 = n$: p è un vertice.

I punti q e s. Allo stesso modo il rango è 4 se il blocco delle due prime righe sulle colonne delle componenti positive è invertibile.

- q: $I(q) = \{1, 2, 3, 6\}$, componenti positive x_2, x_3; blocco $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinante 1. Vertice.
- s: $I(s) = \{1, 2, 3, 5\}$, componenti positive x_2, x_4; blocco $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, determinante 2. Vertice.

← *Torna all'Esercizio 5, pagina 14*

Soluzione dell'Esercizio 6 – Vertici e minimo di una regione limitata

I vincoli sono $m = 6$, compresi i due di segno, e $n = 2$: al più $\binom{6}{2} = 15$ vertici. Le coppie che danno punti di S sono

vertice	$(2,0)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(4,2)$	$(4,3)$
z	4	6	9	14	17

I vertici sono 5. S è limitata, quindi il minimo esiste ed è in un vertice: $x^* = (2,0)$, con $z^* = 4$. In $(2,0)$ sono attivi tre vincoli, (1), (2) e $x_2 \geq 0$, e tre coppie diverse danno lo stesso vertice.

← *Torna all'Esercizio 6, pagina 14*

Soluzione dell'Esercizio 7 – Secondo esonero 2023-24, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti A e D, esercizio 1

(a) Per ogni τ, S è un poliedro, l'intersezione di tre semipiani chiusi, quindi è convesso.

(b) Prima $(1,1)$ deve stare in S: il secondo vincolo dà $1 + 3 = 4 \geq 4$, il terzo $1 \geq 0$, il primo $4 - \tau \leq 3$, cioè $\tau \geq 1$. Per essere un vertice servono $n = 2$ vincoli attivi linearmente indipendenti.

- Il secondo vincolo è attivo; il terzo no, perché $x = 1 > 0$.
- Deve quindi essere attivo il primo: $4 - \tau = 3$, cioè $\tau = 1$.
- Con $\tau = 1$ le righe attive sono $(4, -1)$ e $(1, 3)$, con determinante $12 + 1 = 13 \neq 0$: rango 2.

$(1, 1)$ è un vertice se e solo se $\tau = 1$.

(c) Con $\tau = 1$ i vincoli sono $4x - y \leq 3$, $x + 3y \geq 4$, $x \geq 0$. Il secondo e il terzo all'uguaglianza danno $x = 0$, $y = 4/3$. Il primo vale $-4/3 \leq 3$: $(0, 4/3)$ è un vertice distinto da $(1, 1)$. Il primo e il terzo darebbero $(0, -3)$, che viola il secondo: i vertici sono solo questi due.

← *Torna all'Esercizio 7, pagina 14*

Soluzione dell'Esercizio 8 – Appelli del 23/02 e dell'11/07/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, esercizio 3, adattato

Si numerano i vincoli da (1) a (4) nell'ordine. $m = 4$, $n = 3$: le scelte di tre vincoli sono $\binom{4}{3} = 4$.

- $\{1, 2, 3\}$: $x_1 = 0$, $x_3 = 2$, $x_2 = 2$; il (4) dà $2 \geq 0$. $(0, 2, 2)$ è un vertice.
- $\{1, 2, 4\}$: con $x_2 = 0$ le due equazioni diventano $x_1 + x_3 = 4$ e $x_1 + x_3 = 2$: sistema incompatibile, righe di rango 2. Nessun vertice.
- $\{1, 3, 4\}$: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 4$; il (2) dà $4 \leq 2$, falso. $(0, 0, 4) \notin P$.
- $\{2, 3, 4\}$: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 2$; il (1) dà $2 \leq 4$. $(0, 0, 2)$ è un vertice.

I vertici di P sono $(0, 2, 2)$ e $(0, 0, 2)$.

← *Torna all'Esercizio 8, pagina 15*

Soluzione dell'Esercizio 9 – Appelli del 23/02, 11/07 e 16/09/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 7

Qui $m = 2$ vincoli e $n = 3$ variabili. In ogni punto i vincoli attivi sono al più 2, quindi il loro rango è al più $2 < 3$: nessun punto è un vertice. Equivalentemente, $m < n$ e il numero massimo di vertici è 0.

(c) è vera; (a), (b) e (d) sono false.

← *Torna all'Esercizio 9, pagina 15*

Soluzione dell'Esercizio 10 – Appelli del 23/02, 11/07 e 16/09/2024, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, domanda 10

(b) Vera: è il caso 3 del teorema fondamentale, perché P non contiene rette.

Le altre sono false.

- (a) e (d): il problema può essere inammissibile o illimitato inferiormente, come il problema illimitato della sezione 2. Allora non c'è ottimo.

- (c): senza l'ipotesi sulle rette il vertice può mancare. Con $P = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ e obiettivo x_1 i minimi globali sono i punti della retta $x_1 = 0$, ma P non ha vertici.

← *Torna all'Esercizio 10, pagina 15*