

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 2 · Prof. Giampaolo Liuzzi

Capitolo 8: Derivate direzionali e parziali

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Derivata direzionale · Derivate parziali e gradiente · Matrice Jacobiana ·
Differenziabilità in $\mathbb{R}$ · Derivate senza continuità

Indice

1	Restrizione a una semiretta	1
2	Derivata direzionale	2
3	Derivate parziali e gradiente	2
4	Derivate parziali e derivate direzionali	4
5	Matrice Jacobiana	4
6	Derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}$	5
7	Derivate senza continuità	6
8	Esercizi	9
9	Soluzioni	11

1 Restrizione a una semiretta

Dati un punto $x \in \mathbb{R}^n$ e una direzione $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, i punti

$$x + td, \quad t \geq 0,$$

formano la **semiretta** che parte da x con direzione d (Figura 1); per $t \in \mathbb{R}$ si ottiene tutta la retta. Restringendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ alla semiretta si ottiene una funzione della sola variabile t :

$$\varphi(t) = f(x + td), \quad \varphi(0) = f(x).$$

Per scriverla basta sostituire nell'espressione di f le coordinate di $x + td$. Così una funzione di n variabili si studia con gli strumenti delle funzioni di una variabile.

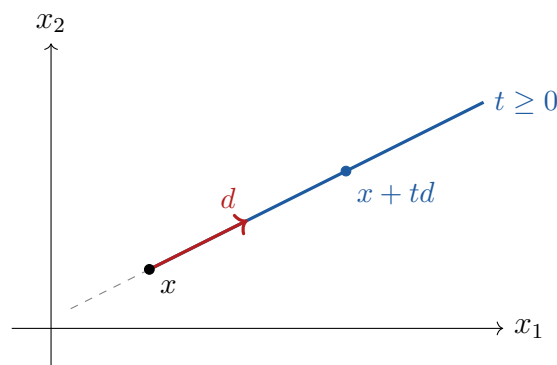


Figura 1: La semiretta $\{x + td : t \geq 0\}$ (in blu) parte da x nella direzione di d (in rosso); il tratto tratteggiato, con $t < 0$, completa la retta.

Esempio – La funzione a sei gobbe

Sia

$$f(x, y) = \left(4 - 2.1x^2 + \frac{1}{3}x^4\right)x^2 + xy + (-4 + 4y^2)y^2,$$

un polinomio, quindi continuo su $\mathbb{R}^2$. Tre restrizioni:

1. asse x , $y = 0$: $f(x, 0) = 4x^2 - 2.1x^4 + \frac{1}{3}x^6$, funzione di x ;
2. retta $x = -1$: $f(-1, y) = \frac{67}{30} - y - 4y^2 + 4y^4$, funzione di y ;
3. retta per $(-1, 0)$ con direzione $(2, 1)$, cioè $x = -1 + 2t$, $y = t$:

$$\varphi(t) = \left(4 - 2.1(-1 + 2t)^2 + \frac{1}{3}(-1 + 2t)^4\right)(-1 + 2t)^2 + (-1 + 2t)t + (-4 + 4t^2)t^2,$$

un polinomio di sesto grado in t , con termine di grado massimo $\frac{64}{3}t^6$.

2 Derivata direzionale

Definizione – Derivata direzionale

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ammette **derivata direzionale** in $x \in \mathbb{R}^n$ lungo $d \in \mathbb{R}^n$ se esiste finito il limite

$$Df(x, d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}.$$

Il limite è quello del rapporto incrementale della restrizione $\varphi(t) = f(x + td)$, ma solo da destra: si guarda la semiretta, con $t > 0$. Un limite uguale a $+\infty$ o a $-\infty$ non dà una derivata direzionale.

Esempio – Lungo una semiretta del piano

Siano $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $x = (1, 1)$ e $d = (-2, -2)$. Allora $x + td = (1 - 2t, 1 - 2t)$ e la restrizione è quadratica in t :

$$\varphi(t) = (1 - 2t)^2 + (1 - 2t)^2 = 2 - 8t + 8t^2.$$

Con $\varphi(0) = f(x) = 2$,

$$Df(x, d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-8t + 8t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-8 + 8t) = -8.$$

3 Derivate parziali e gradiente

Definizione – Derivata parziale

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ammette **derivata parziale** in $x \in \mathbb{R}^n$ rispetto alla variabile x_i se esiste finito il limite

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}.$$

Solo la coordinata x_i si muove, di h ; le altre restano ferme. Il limite è per $h \rightarrow 0$ da entrambi i lati, non solo da destra come nella derivata direzionale.

Esempio – Derivata parziale rispetto a x_3

Sia $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_1x_3 + x_2x_3^2$. Fissato x , si sostituisce $x_3 + h$ a x_3 : con x_1, x_2, x_3 costanti, la restrizione è una funzione quadratica di h ,

$$\varphi(h) = x_1^2 + 3x_1x_3 + x_2x_3^2 + (3x_1 + 2x_2x_3)h + x_2h^2.$$

Quindi

$$\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = 3x_1 + 2x_2x_3 + x_2h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 3x_1 + 2x_2x_3.$$

Il risultato non è un numero ma una funzione di x . Nel punto $(1, 0, 1)$ vale 3.

L'esempio mostra la **regola pratica**: la derivata parziale rispetto a x_i è la derivata di f come funzione della sola x_i , trattando le altre variabili come costanti. Valgono quindi le regole di derivazione di una variabile. L'Esercizio 1 completa l'esempio con le altre due derivate parziali.

Definizione – Funzione derivabile e gradiente

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è **derivabile** in x se ammette in x le derivate parziali rispetto a tutte le variabili. Il vettore colonna delle derivate parziali è il **gradiente** di f in x :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Il simbolo ∇ si legge «nabla». Basta che manchi una sola derivata parziale perché f non sia derivabile in x .

Esempio – Gradiente di $e^{x^2+y^2}$

Sia $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Con y costante, la derivata rispetto a x è quella di una funzione composta, e simmetricamente per y :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x e^{x^2+y^2} \\ 2y e^{x^2+y^2} \end{pmatrix} = 2e^{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nel punto $(-2, 1)$ l'esponente vale 5, e il prodotto scalare con il vettore $(1, 1)$ è la somma delle componenti:

$$\nabla f(-2, 1) = \begin{pmatrix} -4e^5 \\ 2e^5 \end{pmatrix}, \quad \langle \nabla f(-2, 1), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = -4e^5 + 2e^5 = -2e^5.$$

4 Derivate parziali e derivate direzionali

Sia $e_i \in \mathbb{R}^n$ il vettore con 1 nella componente i e 0 nelle altre, l' i -esimo vettore della base canonica. Allora

$$x + he_i = (x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n),$$

che è il punto del rapporto incrementale della derivata parziale rispetto a x_i . Le due derivate sono quindi legate.

Proposizione – Parziali e direzionali lungo gli assi

Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. f ammette derivata parziale rispetto a x_i in x se e solo se

1. esistono $Df(x, e_i)$ e $Df(x, -e_i)$, e
2. $Df(x, e_i) = -Df(x, -e_i)$.

In tal caso $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = Df(x, e_i)$.

Dimostrazione

Il rapporto incrementale della parziale è $R(h) = \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}$. Il limite per $h \rightarrow 0$ esiste se e solo se esistono uguali i limiti destro e sinistro.

1. Da destra: $\lim_{h \rightarrow 0^+} R(h) = Df(x, e_i)$, per definizione.
2. Da sinistra, con $h = -t$ e $t \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} R(h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + t(-e_i)) - f(x)}{-t} = -Df(x, -e_i).$$

3. I due limiti esistono finiti e coincidono se e solo se valgono le condizioni 1 e 2; il valore comune è $Df(x, e_i)$.

□

I due concetti sono collegati ma diversi: le derivate parziali dicono come varia f lungo gli assi, non lungo le altre direzioni.

5 Matrice Jacobiana

Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un vettore di m funzioni di n variabili, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$. Se ogni g_i è derivabile in x , le derivate parziali sono $m \cdot n$: n per ciascuna delle m funzioni.

Definizione – Matrice Jacobiana

La **matrice Jacobiana** di g in x è la matrice $m \times n$

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla g_1(x)^\top \\ \vdots \\ \nabla g_m(x)^\top \end{pmatrix}.$$

Le dimensioni contano: una riga per funzione, una colonna per variabile. La riga i è il gradiente di g_i scritto in riga. La matrice $\nabla g(x)$, che ha per colonne i gradienti $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_m(x)$, è $n \times m$, e

$$J_g(x) = \nabla g(x)^\top.$$

Gli Esercizi 3 e 4 calcolano due Jacobiane 2×3 .

6 Derivabilità e differenziabilità in $\mathbb{R}$

Le derivate in più variabili si confrontano con quelle di una variabile.

Definizione – Funzione derivabile in $\mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **derivabile** in x_0 se esiste finito il limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

la **derivata** di f in x_0 .

Definizione – Funzione differenziabile in $\mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **differenziabile** in x_0 se esiste una costante $a \in \mathbb{R}$ tale che, per $x \rightarrow x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Il simbolo $o(x - x_0)$, «o piccolo», indica una quantità che tende a 0 più rapidamente di $x - x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Vicino a x_0 , quindi, f si approssima con la funzione affine $f(x_0) + a(x - x_0)$, con un errore trascurabile rispetto a $x - x_0$.

Teorema – Equivalenza in $\mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 se e solo se è differenziabile in x_0 . In tal caso $a = f'(x_0)$.

Dimostrazione

Con $x = x_0 + h$:

1. se f è derivabile, posto $a = f'(x_0)$, il resto $f(x_0 + h) - f(x_0) - ah$ diviso per h è $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) \rightarrow 0$: è un $o(h)$;
2. se f è differenziabile, $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a + \frac{o(h)}{h} \rightarrow a$: f è derivabile e $f'(x_0) = a$.

□

Per questo in una variabile si parla di solito solo di derivabilità. Il significato geometrico della costante $a = f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente.

Definizione – Retta tangente e vettore normale

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 , la **retta tangente** al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

e il vettore $(-f'(x_0), 1)$ è il **vettore normale** alla retta tangente, e al grafico di f in quel punto.

La retta ha direzione $(1, f'(x_0))$, e il prodotto scalare con $(-f'(x_0), 1)$ è $-f'(x_0) + f'(x_0) = 0$: i due vettori sono ortogonali.

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in x_0 , allora:

1. f è continua in x_0 : nella differenziabilità, $a(x - x_0) + o(x - x_0) \rightarrow 0$, quindi $f(x) \rightarrow f(x_0)$;
2. f si approssima vicino a x_0 con una funzione affine;
3. il grafico ha la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$: non ha salti, perché f è continua, né spigoli, dove la tangente non esisterebbe.

La Sezione 7 mostra che in $\mathbb{R}^n$ le derivate parziali e direzionali non garantiscono queste proprietà.

7 Derivate senza continuità

In $\mathbb{R}^n$ l'esistenza di tutte le derivate parziali, e anche di tutte le derivate direzionali, non basta per la continuità. Lo mostrano due funzioni che valgono solo 0 e 1 (Figura 2).

Esempio – Funzione nulla sugli assi

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } xy \neq 0, \\ 0 & \text{se } xy = 0, \end{cases}$$

che vale 0 sugli assi coordinati e 1 fuori.

1. *Non è continua nell'origine.* $f(0, 0) = 0$, ma sulla bisettrice $\{(x, x) : x \neq 0\}$, di cui l'origine è di accumulazione, f vale 1.
2. *È derivabile nell'origine.* Sugli assi $f = 0$, quindi i numeratori dei rapporti incrementali sono nulli, non solo tendenti a 0:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

e allo stesso modo $\partial f(0, 0)/\partial y = 0$.

3. *Lungo gli assi* esistono le derivate direzionali, nulle: per la proposizione della Sezione 4, oppure perché $f(td) = 0$ per d su un asse.
4. *Lungo le altre direzioni no.* Se $d = (d_x, d_y)$ con $d_x \neq 0$ e $d_y \neq 0$, per $t > 0$ il punto (td_x, td_y) non sta sugli assi e f vale 1:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(td_x, td_y) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty.$$

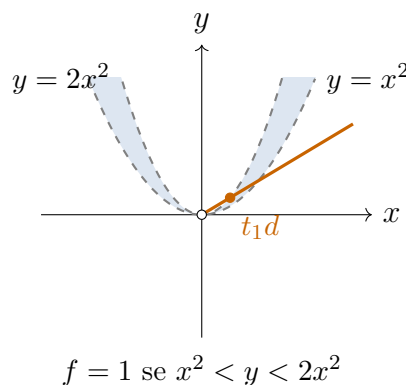
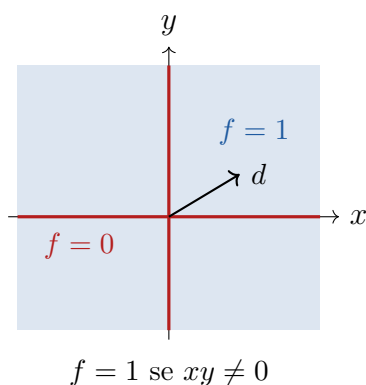


Figura 2: A sinistra, la prima funzione vale 1 nella zona azzurra e 0 sugli assi (in rosso): lungo d vale 1 appena $t > 0$. A destra, la seconda vale 1 solo nella zona azzurra fra le parabole tratteggiate; la semiretta arancione esce dall'origine sopra la parabola $y = 2x^2$, dove $f = 0$, ed entra nella zona azzurra solo dopo $t_1 d$.

In una variabile una funzione derivabile è continua; qui no. Le derivate direzionali, almeno, si accorgono della discontinuità. Non sempre.

Esempio – Funzione fra due parabole

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

che vale 1 solo strettamente fra le parabole $y = x^2$ e $y = 2x^2$; sulle parabole, e quindi nell'origine, vale 0.

1. *Non è continua nell'origine.* Sulla parabola $\{(x, \frac{3}{2}x^2) : x \neq 0\}$, compresa fra le due, f vale $1 \neq f(0, 0)$.
2. *È derivabile nell'origine.* Sugli assi $f = 0$, e come nell'esempio precedente le due derivate parziali sono nulle.
3. *Ammette derivata direzionale nulla lungo ogni direzione $d = (d_x, d_y) \neq 0$.* Basta che $f(td_x, td_y) = 0$ per $t > 0$ piccolo:

- se $d_y \leq 0$, il punto ha $y \leq 0$ e non sta fra le parabole, che hanno $y > 0$;
- se $d_x = 0$ e $d_y > 0$, il punto sta sull'asse y , dove $2x^2 = 0 < y$;
- se $d_x \neq 0$ e $d_y > 0$, il punto sta fra le parabole solo se $td_y < 2t^2d_x^2$, cioè $t > d_y/(2d_x^2)$.

Per $0 < t \leq d_y/(2d_x^2)$ si ha quindi $f(td) = 0$, e il rapporto incrementale è nullo: $Df(0, d) = 0$.

Nell'origine	$f = 1$ se $xy \neq 0$	$f = 1$ se $x^2 < y < 2x^2$
continua	no	no
derivate parziali	nulle	nulle
derivate direzionali	solo lungo gli assi	in ogni direzione, nulle

I rapporti incrementali guardano f solo lungo rette per il punto. In $\mathbb{R}$ bastano a dire se f è continua; in $\mathbb{R}^n$ no, perché ci si può avvicinare al punto anche lungo curve, come le parabole del secondo esempio.

Riepilogo

- **Restrizione a una semiretta:** $\varphi(t) = f(x + td)$, $t \geq 0$, funzione di una variabile.
- **Derivata direzionale:** $Df(x, d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (f(x + td) - f(x))/t$, se esiste finito.
- **Derivata parziale:** $\partial f(x)/\partial x_i$, limite per $h \rightarrow 0$ incrementando solo x_i ; si deriva in x_i con le altre variabili costanti.
- **Gradiente:** f derivabile se esistono tutte le parziali; $\nabla f(x)$ è il loro vettore colonna.
- **Parziali e direzionali:** $\partial f/\partial x_i$ esiste $\iff Df(x, e_i) = -Df(x, -e_i)$, ed è $Df(x, e_i)$.
- **Jacobiana:** $J_g(x)$, $m \times n$, righe $\nabla g_i(x)^\top$; $J_g(x) = \nabla g(x)^\top$.
- **In $\mathbb{R}$:** derivabile $\iff$ differenziabile, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$; derivabile $\Rightarrow$ continua; normale $(-f'(x_0), 1)$.
- **In $\mathbb{R}^n$:** tutte le parziali e tutte le direzionali non implicano la continuità.

8 Esercizi

Esercizio 1 – Le altre derivate parziali

Per $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_1x_3 + x_2x_3^2$ calcolare $\partial f/\partial x_1$ e $\partial f/\partial x_2$, il gradiente $\nabla f(x)$ e il suo valore in $(1, 0, 1)$.

Soluzione a pagina 11 $\rightarrow$

Esercizio 2 – Gradiente di un seno

Sia $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. Calcolare $\nabla f(x, y)$, poi $\nabla f(1, -1)$ e il prodotto scalare $\langle \nabla f(1, -1), (1, 1)^\top \rangle$.

Soluzione a pagina 11 $\rightarrow$

Esercizio 3 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti E e P, esercizio 2, adattato

Sono assegnate le funzioni $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 - 2 \\ x_1 - x_3 - 1 \end{pmatrix}, \quad f(y_1, y_2) = \|(y_1, y_2)\|_2^2,$$

e la funzione $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ composizione di f e g , cioè $h(x) = f(g(x))$. Calcolare la Jacobiana $J_g(x)$ e il vettore $\nabla h(x)$.

Soluzione a pagina 11 →

Esercizio 4 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti A e Y, esercizio 2, adattato

Sono assegnate le funzioni $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}, \quad f(y_1, y_2) = \|(y_1, y_2)\|_2,$$

e la funzione $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ composizione di f e g , cioè $h(x) = f(g(x))$. Calcolare la Jacobiana $J_g(x)$ e il vettore $\nabla h(x)$.

Soluzione a pagina 12 →

9 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Le altre derivate parziali

Con la regola pratica, trattando come costanti le altre variabili:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2x_1 + 3x_3, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = x_3^2, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = 3x_1 + 2x_2x_3,$$

l'ultima dall'esempio della Sezione 3. Le tre derivate esistono in ogni punto, quindi f è derivabile su $\mathbb{R}^3$ e

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_3 \\ x_3^2 \\ 3x_1 + 2x_2x_3 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 9](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Gradiente di un seno

Con y costante, la derivata della composta rispetto a x è $\cos(x^2 + y^2) \cdot 2x$; simmetricamente per y :

$$\nabla f(x, y) = 2 \cos(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

In $(1, -1)$ l'argomento vale 2:

$$\nabla f(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 \cos 2 \\ -2 \cos 2 \end{pmatrix}, \quad \langle \nabla f(1, -1), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2 \cos 2 - 2 \cos 2 = 0.$$

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 9](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti E e P, esercizio 2, adattato

Le componenti di g sono $g_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 2$ e $g_2 = x_1 - x_3 - 1$, con gradienti costanti. Le righe della Jacobiana sono ∇g_1^T e ∇g_2^T :

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $f(y) = y_1^2 + y_2^2$,

$$h(x) = (x_1 + x_2 + x_3 - 2)^2 + (x_1 - x_3 - 1)^2.$$

Derivando ogni quadrato come funzione composta:

1. $\frac{\partial h}{\partial x_1} = 2(x_1 + x_2 + x_3 - 2) + 2(x_1 - x_3 - 1) = 2(2x_1 + x_2 - 3);$
2. $\frac{\partial h}{\partial x_2} = 2(x_1 + x_2 + x_3 - 2);$
3. $\frac{\partial h}{\partial x_3} = 2(x_1 + x_2 + x_3 - 2) - 2(x_1 - x_3 - 1) = 2(x_2 + 2x_3 - 1).$

Quindi

$$\nabla h(x) = 2 \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2 \\ x_2 + 2x_3 - 1 \end{pmatrix}.$$

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 9](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti A e Y, esercizio 2, adattato

La prima componente di g è costante, con gradiente nullo; la seconda ha $\nabla g_2(x) = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2)^\top$. Quindi

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2x_3 & x_1x_3 & x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Poi

$$h(x) = \sqrt{1 + (x_1x_2x_3)^2} = \sqrt{1 + x_1^2x_2^2x_3^2},$$

con radicando ≥ 1 : h è definita su tutto $\mathbb{R}^3$. Derivando la radice come funzione composta, per esempio rispetto a x_1 ,

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{2x_1x_2^2x_3^2}{2\sqrt{1 + x_1^2x_2^2x_3^2}} = \frac{x_1x_2^2x_3^2}{\sqrt{1 + x_1^2x_2^2x_3^2}},$$

e allo stesso modo rispetto a x_2 e x_3 . Con $\sqrt{1 + x_1^2x_2^2x_3^2} = \|g(x)\|_2$:

$$\nabla h(x) = \frac{1}{\|g(x)\|_2} \begin{pmatrix} x_1x_2^2x_3^2 \\ x_1^2x_2x_3^2 \\ x_1^2x_2^2x_3 \end{pmatrix}.$$

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 10](#)