

Appunti di Programmazione Matematica

Canale 2 · Prof. Giampaolo Liuzzi

Capitolo 7: Teorema ponte, restrizioni e continuità

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

Argomenti: Teorema ponte · Restrizioni · Continuità · Funzioni lineari, affini e quadratiche

Indice

1	Il teorema ponte	1
2	Restrizioni	2
3	Continuità	5
4	Funzioni lineari, affini e quadratiche	6
5	Esercizi	8
6	Soluzioni	10

1 Il teorema ponte

Teorema – Teorema ponte

Siano $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ di accumulazione per X , e sia $\ell \in \mathbb{R}^*$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se, per ogni successione $\{x_k\}$ di punti di $X \setminus \{x_0\}$ convergente a x_0 ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \ell.$$

Il teorema fa da ponte fra limiti di funzione (Capitolo 6) e limiti di successione (Capitolo 5). La freccia «per ogni successione, allora il limite» è difficile da usare per dimostrare che un limite esiste, perché le successioni sono infinite. Si usa invece per dimostrare che un limite *non* esiste: bastano due successioni convergenti a x_0 lungo le quali f ha limiti diversi.

Esempio – $(x + y)/(x - y)$ nell'origine

Sia

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}, \quad X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\},$$

il piano senza la bisettrice del primo e del terzo quadrante. L'origine non sta in X , ma è di accumulazione per X . Le successioni

$$p_k = \begin{pmatrix} 1/k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/k \end{pmatrix}$$

stanno in $X \setminus \{0\}$, sui due assi, e convergono all'origine (Figura 1). Per ogni k

$$f(p_k) = \frac{1/k + 0}{1/k - 0} = 1, \quad f(q_k) = \frac{0 + 1/k}{0 - 1/k} = -1.$$

Le due successioni dei valori sono costanti, con limiti 1 e -1 : il limite di f per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ non esiste.

Nel piano il limite si scrive con la coppia, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$: il punto (x, y) tende al punto $(0, 0)$. È un errore scrivere « $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ » sotto il simbolo di limite: il punto che si avvicina è uno solo, la coppia, non due variabili separate.

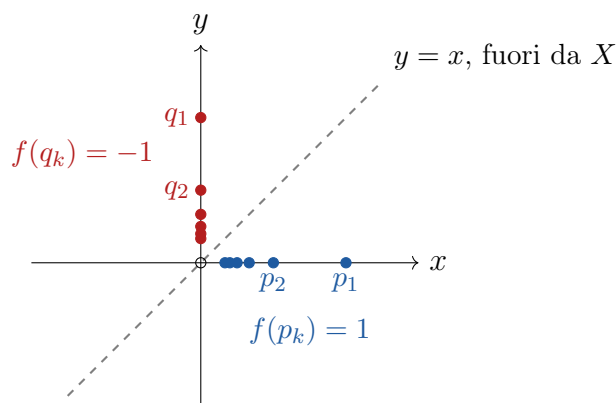


Figura 1: Le successioni p_k (in blu) e q_k (in rosso) tendono all'origine lungo gli assi; f vale 1 sulla prima e -1 sulla seconda. La bisettrice tratteggiata non sta nel dominio.

2 Restrizioni

Definizione – Restrizione

Siano $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \subseteq X$. La **restrizione** di f ad A è la funzione $f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$f|_A(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in A.$$

La restrizione ha gli stessi valori di f , ma solo sui punti di A . Per una funzione di più variabili è uno strumento nuovo: se A è una retta o una curva, descritta da un parametro, $f|_A$ diventa una funzione di una sola variabile. Per esempio, su $A = \{(t, t^2) : t \in \mathbb{R}\}$, la parabola, si studia la funzione di t data da $f(t, t^2)$.

Teorema – Limite e restrizioni

Siano $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}_*^n$ di accumulazione per X , e sia $\ell \in \mathbb{R}^*$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

se e solo se, per ogni $A \subseteq X$ di cui x_0 è punto di accumulazione,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_A(x) = \ell.$$

L'insieme A deve avere x_0 come punto di accumulazione, altrimenti il limite della restrizione non si può considerare. Come per il teorema ponte, il teorema si usa soprattutto in negativo:

Proposizione – Criterio di non esistenza

Se due restrizioni $f|_A$ e $f|_B$, con x_0 di accumulazione per A e per B , hanno limiti diversi per $x \rightarrow x_0$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste.

Il metodo per un punto x_0 del piano:

1. si provano prima le restrizioni più semplici: gli assi coordinati, se passano per x_0 , oppure le rette parallele agli assi per x_0 ;
2. poi le altre rette per x_0 ;
3. poi le curve, come le parabole.

Ci si ferma appena due restrizioni danno limiti diversi. Che molte restrizioni abbiano lo stesso limite non prova che il limite esiste, come mostra il primo esempio. Le due successioni del teorema ponte stanno sugli assi: le restrizioni agli assi danno lo stesso risultato, 1 e -1 .

Esempio – $x^2y^2/(x^6 + y^3)$ nell'origine

Sia

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^6 + y^3},$$

definita dove $y^3 \neq -x^6$, cioè fuori dalla curva $y = -x^2$. L'origine non sta nel dominio, ma è di accumulazione per ciascuno degli insiemi seguenti, tutti privati dell'origine (Figura 2).

1. Asse x , $A = \{(x, 0) : x \neq 0\}$: $f(x, 0) = \frac{0}{x^6} = 0$.
2. Asse y , $B = \{(0, y) : y \neq 0\}$: $f(0, y) = \frac{0}{y^3} = 0$.
3. Retta $y = 2x$, per $x \neq 0$ vicino a 0: $f(x, 2x) = \frac{4x^4}{x^6 + 8x^3} = \frac{4x}{x^3 + 8} \rightarrow 0$.
4. Parabola $C = \{(x, x^2) : x \neq 0\}$: $f(x, x^2) = \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2}$.

Le restrizioni ad A e a C sono costanti, uguali a 0 e a $\frac{1}{2}$: il limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ non esiste. Lungo gli assi e lungo la retta il limite vale 0, ma questo non bastava a concludere.

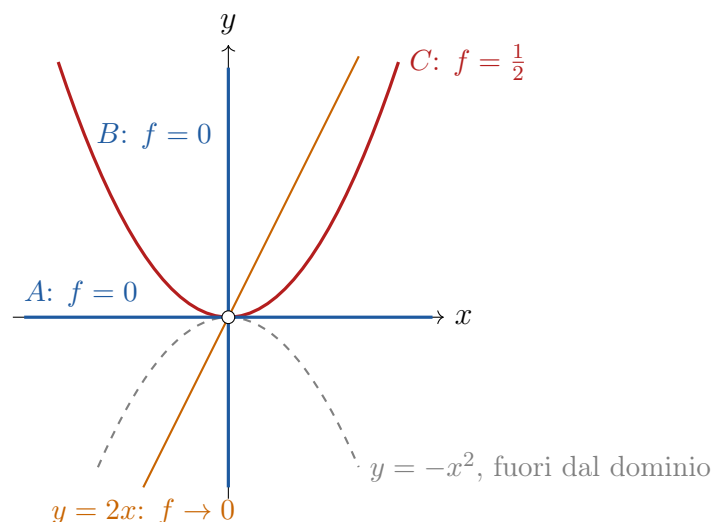


Figura 2: Restrizioni di $f(x, y) = x^2 y^2 / (x^6 + y^3)$: sugli assi (in blu) f vale 0, sulla retta $y = 2x$ tende a 0, sulla parabola $y = x^2$ (in rosso) vale $\frac{1}{2}$. L'origine non sta nel dominio.

Esempio – $xy/(x^2 + y^2)$ nell'origine

$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

1. Asse x , $A = \{(x, 0) : x \neq 0\}$: $f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0$.
2. Asse y , $B = \{(0, y) : y \neq 0\}$: $f(0, y) = 0$.
3. Bisettrice, $C = \{(x, x) : x \neq 0\}$: $f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

Le restrizioni ad A e a C hanno limiti 0 e $\frac{1}{2}$: il limite nell'origine non esiste.

Esempio – $(3x + 5y)/(x^2 + y^2)$ nell'origine

$f(x, y) = \frac{3x + 5y}{x^2 + y^2}$ è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; nell'origine numeratore e denominatore si annullano, una forma indeterminata $0/0$. Sull'asse x

$$f(x, 0) = \frac{3x}{x^2} = \frac{3}{x} \quad (x \neq 0),$$

che per $x \rightarrow 0$ non ha limite. Si divide allora l'asse nei due semiassi, entrambi con l'origine come punto di accumulazione:

1. $A_+ = \{(x, 0) : x > 0\}$: $f|_{A_+} = 3/x \rightarrow +\infty$;
2. $A_- = \{(x, 0) : x < 0\}$: $f|_{A_-} = 3/x \rightarrow -\infty$.

I due limiti sono diversi: il limite nell'origine non esiste.

Gli Esercizi 1 e 2 applicano il metodo; nel secondo nessuna retta basta, e serve una parabola.

3 Continuità

Definizione – Funzione continua

Siano $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$. f è **continua** in x_0 se vale una delle due condizioni:

1. x_0 è un punto isolato di X ;
2. x_0 è di accumulazione per X , e il limite esiste e vale $f(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

f è continua su $E \subseteq X$ se è continua in ogni punto di E ; si scrive $f \in C^0(E)$, di classe zero su E .

Nei punti isolati del dominio la continuità vale per definizione: vicino a loro non ci sono altri punti da studiare. In un punto di accumulazione, continua vuol dire che f assume valori arbitrariamente vicini a $f(x_0)$ in tutti i punti sufficientemente vicini a x_0 . Per questo x_0 deve stare nel dominio: serve il valore $f(x_0)$.

Osservazione – La continuità è locale

Il limite in x_0 guarda solo i punti di un intorno di x_0 . Quindi:

1. se $f = g$ su $\mathcal{N}(x_0) \cap X$, per un intorno $\mathcal{N}(x_0)$, e g è continua in x_0 , allora anche f è continua in x_0 ;
2. se due restrizioni di f , a insiemi di cui x_0 è di accumulazione, hanno limiti diversi in x_0 , oppure un limite diverso da $f(x_0)$, allora f non è continua in x_0 .

Teorema – Operazioni che preservano la continuità

Siano $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in X \cap Y$. Allora sono continue in x_0 :

1. $f \pm g$ e αf , per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. fg , e f/g se $g(x_0) \neq 0$;
3. $|f|$ e $\max\{f, 0\}$.

Inoltre, se $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 e $h : Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $f(x_0) \in Y$, la funzione composta $h(f(x))$ è continua in x_0 .

La composta è l'operazione più utile: con poche funzioni continue note se ne ottengono moltissime. Si parte dalle funzioni più semplici.

Proposizione – Funzioni coordinate

Per $i = 1, \dots, n$ la funzione $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_i(x) = x_i$, è continua su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione

Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Per ogni x , $|x_i - \bar{x}_i| \leq \|x - \bar{x}\|_2$ (Capitolo 5, Sezione 2). Fissato $\varepsilon > 0$, con $\delta = \varepsilon$ si ha $|\varphi_i(x) - \varphi_i(\bar{x})| < \varepsilon$ per $\|x - \bar{x}\|_2 < \delta$: il limite vale $\varphi_i(\bar{x})$. $\square$

Ogni polinomio nelle variabili $x_1, \dots, x_n$ è fatto di somme e prodotti di funzioni coordinate e costanti, quindi è continuo su $\mathbb{R}^n$. Lo stesso vale per i rapporti di polinomi, dove il denominatore non si annulla.

4 Funzioni lineari, affini e quadratiche

Definizione – Funzione lineare e funzione affine

Dati $c \in \mathbb{R}^n$ e $d \in \mathbb{R}$, la funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

è **lineare**; la funzione $f(x) = c^T x + d$ è **affine**.

Le funzioni lineari sono esattamente quelle con $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Sono le funzioni obiettivo e i primi membri dei vincoli dei modelli del Capitolo 1. Lineari e affini sono continue su $\mathbb{R}^n$: somme di costanti per funzioni coordinate, più una costante.

Definizione – Forma quadratica

Una **forma quadratica** è un polinomio omogeneo di secondo grado:

- in una variabile, $q(x) = ax^2$;
- in due variabili, $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, con a, b, c non tutti nulli;
- in n variabili, $q(x) = x^T Q x$, con Q matrice $n \times n$ non nulla.

In due variabili la matrice si ottiene mettendo a e c sulla diagonale e il coefficiente b del termine misto fuori dalla diagonale, tutto da una parte oppure diviso a metà:

$$q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La seconda matrice è simmetrica. Si può sempre supporre Q simmetrica: $x^\top Q x$ è un numero, uguale al suo trasposto $x^\top Q^\top x$, quindi

$$x^\top Q x = x^\top \frac{Q + Q^\top}{2} x,$$

e $(Q + Q^\top)/2$ è simmetrica, anche se in generale diversa da Q .

Esempio – La matrice di una forma quadratica

Per $q(x, y) = 3x^2 + 4xy - y^2$ le due matrici sono

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e, simmetrica,} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Con la seconda: $3x^2 + 2xy + 2yx - y^2 = 3x^2 + 4xy - y^2$.

Definizione – Funzione quadratica

Una **funzione quadratica** è la somma di una forma quadratica e di una funzione affine:

$$q(x) = x^\top Q x + c^\top x + d,$$

con Q matrice $n \times n$ non nulla, che si può prendere simmetrica.

Se Q fosse nulla, resterebbe una funzione affine. Le forme e le funzioni quadratiche sono polinomi, quindi continue su tutto $\mathbb{R}^n$.

Riepilogo

- **Teorema ponte:** $f(x) \rightarrow \ell$ per $x \rightarrow x_0 \iff f(x_k) \rightarrow \ell$ per ogni $\{x_k\} \subseteq X \setminus \{x_0\}$ con $x_k \rightarrow x_0$.
- **Restrizione:** $f|_A(x) = f(x)$ per $x \in A \subseteq X$; su una retta o una curva è una funzione di una variabile.
- **Limite e restrizioni:** $f \rightarrow \ell \iff f|_A \rightarrow \ell$ per ogni A con x_0 di accumulazione.
- **Non esistenza:** due successioni o due restrizioni con limiti diversi; prima gli assi, poi le rette, poi le curve.
- **Continuità:** x_0 isolato, oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; $f \in C^0(E)$ se continua in ogni punto di E .
- **Operazioni:** somme, prodotti, rapporti con denominatore non nullo, $|f|$ e composte di continue sono continue.
- **Lineare, affine:** $c^\top x$ e $c^\top x + d$, continue su $\mathbb{R}^n$.
- **Quadratica:** $x^\top Q x + c^\top x + d$, con $Q \neq 0$ simmetrica; continua su $\mathbb{R}^n$.

5 Esercizi

Esercizio 1 – Due rapporti di quarte potenze

Dimostrare con le restrizioni che non esistono

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^4 - y^4} \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}.$$

Soluzione a pagina 10 →

Esercizio 2 – Una funzione costante a tratti

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che non esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Soluzione a pagina 10 →

Esercizio 3 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti A e X, esercizio 3

Data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2y - 3 & \text{se } y \geq x - 3, \\ y + 2x - x^2 & \text{se } y < x - 3, \end{cases}$$

- (a) dimostrare (usando le restrizioni) che non esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} f(x, y)$;
- (b) determinare il più grande insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $f \in C^0(E)$;
- (c) stabilire se la funzione è continua (e perché lo è) nel punto $(4, 0)$.

Soluzione a pagina 10 →

Esercizio 4 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti B e Y, esercizio 3

Data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = \begin{cases} 2y - 3x & \text{se } xy \geq 0, \\ y - 2x + 1 & \text{se } xy < 0, \end{cases}$$

- (a) dimostrare (usando le restrizioni) che non esiste $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$;
- (b) determinare il più grande insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $f \in C^0(E)$;
- (c) stabilire se la funzione è continua (e perché lo è) nel punto $(0, 1)$.

Soluzione a pagina 11 →

6 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Due rapporti di quarte potenze

La prima funzione è definita dove $x^4 \neq y^4$, cioè fuori dalle due bisettrici $y = \pm x$; la seconda in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. In entrambi i casi gli assi privati dell'origine, $A = \{(x, 0) : x \neq 0\}$ e $B = \{(0, y) : y \neq 0\}$, stanno nel dominio e hanno l'origine come punto di accumulazione.

1. Prima funzione: $f(x, 0) = x^4/x^4 = 1$ e $f(0, y) = y^4/(-y^4) = -1$.
2. Seconda funzione: $f(x, 0) = x^4/x^4 = 1$ e $f(0, y) = -y^4/y^4 = -1$.

In entrambi i casi le restrizioni ad A e a B sono costanti con valori diversi, 1 e -1 : i limiti non esistono.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 8](#)

Soluzione dell'Esercizio 2 – Una funzione costante a tratti

f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e vale 1 solo fra le due parabole $y = x^2$ e $y = 2x^2$.

1. Asse x , $A = \{(x, 0) : x \neq 0\}$: $x^2 < 0$ è falso, quindi $f(x, 0) = 0$.
2. Parabola intermedia, $C = \{(x, \frac{3}{2}x^2) : x \neq 0\}$: per $x \neq 0$ si ha $x^2 < \frac{3}{2}x^2 < 2x^2$, quindi $f = 1$.

Le due restrizioni sono costanti, 0 e 1, e l'origine è di accumulazione per entrambi gli insiemi: il limite non esiste.

Le rette non bastano. Sulla retta $y = mx$ con $m > 0$ e $x > 0$, la condizione $x^2 < mx < 2x^2$ equivale a $m/2 < x < m$; per $0 < x < m/2$ si ha $f = 0$, e lo stesso vale per $x < 0$ e per $m \leq 0$. Su ogni retta per l'origine la restrizione tende a 0.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 8](#)

Soluzione dell'Esercizio 3 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti A e X, esercizio 3

Siano $p_1(x, y) = x^2y - 3$ e $p_2(x, y) = y + 2x - x^2$, polinomi continui su $\mathbb{R}^2$, e L la retta $y = x - 3$. Sopra e su L si ha $f = p_1$, sotto $f = p_2$.

(a) Il punto $(2, -1)$ sta su L , perché $2 - 3 = -1$. Sulla retta orizzontale $y = -1$:

- $A = \{(x, -1) : x < 2\}$: $-1 \geq x - 3$, quindi $f(x, -1) = -x^2 - 3 \rightarrow -7$ per $x \rightarrow 2$;
- $B = \{(x, -1) : x > 2\}$: $-1 < x - 3$, quindi $f(x, -1) = -1 + 2x - x^2 \rightarrow -1$ per $x \rightarrow 2$.

$(2, -1)$ è di accumulazione per A e per B , e i limiti -7 e -1 sono diversi: il limite non esiste.

(b) Si studiano tre zone.

1. Sopra L , l'insieme aperto $\{y > x - 3\}$: ogni punto ha un intorno in cui $f = p_1$, continuo. f è continua (osservazione della Sezione 3).
2. Sotto L , l'aperto $\{y < x - 3\}$: allo stesso modo $f = p_2$ e f è continua.
3. Su L , nel punto $(a, a - 3)$: la restrizione a L è p_1 e tende a $p_1(a, a - 3) = f(a, a - 3)$; la restrizione all'aperto sotto L , di cui il punto è di accumulazione, è p_2 e tende a $p_2(a, a - 3)$. Se i due valori sono diversi, f non è continua. Se sono uguali, sia v il valore comune: dato $\varepsilon > 0$, esistono δ_1 e δ_2 con $|p_1 - v| < \varepsilon$ e $|p_2 - v| < \varepsilon$ nei rispettivi intorni; con $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, in ogni punto dell'intorno f vale p_1 oppure p_2 , quindi $|f - v| < \varepsilon$, e f è continua.

I due valori coincidono quando

$$a^2(a - 3) - 3 = (a - 3) + 2a - a^2 \iff a^3 - 2a^2 - 3a = 0 \iff a(a - 3)(a + 1) = 0,$$

cioè per $a = 0, 3, -1$: i punti $(0, -3)$, $(3, 0)$ e $(-1, -4)$. Quindi

$$E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, a - 3) : a \notin \{-1, 0, 3\}\}.$$

Per $a = 2$ si ritrova il punto $(2, -1)$ del punto (a).

(c) In $(4, 0)$ si ha $0 < 4 - 3 = 1$: il punto sta nell'aperto sotto L , dove $f = p_2$ in tutto un intorno. Poiché p_2 è un polinomio, continuo, f è continua in $(4, 0)$.

[← Torna all'Esercizio 3, pagina 8](#)

Soluzione dell'Esercizio 4 – Primo esonero 2025-26, Canale M-Z, Prof. Giampaolo Liuzzi, compiti B e Y, esercizio 3

Siano $p_1(x, y) = 2y - 3x$ e $p_2(x, y) = y - 2x + 1$. Si ha $f = p_1$ nel primo e nel terzo quadrante e sugli assi ($xy \geq 0$), $f = p_2$ nel secondo e nel quarto, aperti ($xy < 0$).

(a) Due restrizioni per $(1, 0)$:

- asse x , $A = \{(x, 0) : x \neq 1\}$: $xy = 0$, quindi $f(x, 0) = -3x \rightarrow -3$;
- $B = \{(1, y) : y < 0\}$: $xy = y < 0$, quindi $f(1, y) = y - 1 \rightarrow -1$.

$(1, 0)$ è di accumulazione per A e per B , e $-3 \neq -1$: il limite non esiste.

(b) Nei quadranti aperti f coincide con un polinomio in un intorno di ogni punto, quindi è continua. Su un punto degli assi $f = p_1$, e ogni suo intorno contiene punti con $xy < 0$, dove $f = p_2$. Come nell'Esercizio 3, f è continua nel punto se e solo se $p_1 = p_2$ lì:

- asse x , punto $(a, 0)$: $-3a = -2a + 1 \iff a = -1$;
- asse y , punto $(0, b)$: $2b = b + 1 \iff b = 1$.

Nell'origine $p_1 = 0 \neq 1 = p_2$. Quindi f è continua fuori dagli assi e nei due punti $(-1, 0)$ e $(0, 1)$:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} \cup \{(-1, 0), (0, 1)\}.$$

(c) $(0, 1)$ sta sull'asse y , dove f cambia espressione, ma è uno dei due punti in cui $p_1(0, 1) = p_2(0, 1) = 2$: per il punto (b) f è continua in $(0, 1)$.

[← Torna all'Esercizio 4, pagina 9](#)