Appunti di Fondamenti di Comunicazioni e Internet

Canali 1 e 2 · Segnali · Prof.ssa Tiziana Cattai

Capitolo 4: Campionamento e conversione analogico-digitale

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

---

Argomenti: Teorema del campionamento · Aliasing · Ricostruzione · Quantizzazione · Codifica

Indice

1 Campionamento **1**

2 Teorema del campionamento **2**

3 Aliasing **4**

4 Formula di ricostruzione **5**

5 Conversione analogico-digitale **6**

6 Quantizzazione **7**

7 Codifica **8**

8 Conversione digitale-analogica e frequenza di bit **9**

9 Esercizi **10**

10 Soluzioni **12**

1 Campionamento

Definizione – Campionatore

Il **campionatore** legge il segnale a tempo continuo $x(t)$ a intervalli regolari e restituisce la sequenza dei suoi valori, i **campioni**:

$$x_n = x[n] = x(nT_s), \qquad n \text{ intero.}$$

T_s è il **passo** (o intervallo) **di campionamento**; il suo reciproco $F_s = 1/T_s$ è la **frequenza di campionamento**, cioè il numero di campioni al secondo.

Il campionamento porta un segnale continuo in un segnale discreto nel tempo. Lo scopo è farlo **senza perdere informazione**: dai soli campioni x_n si deve poter tornare a $x(t)$. Questo è possibile solo per una classe di segnali.

Definizione – Segnale limitato in banda

Un segnale $x(t)$ è **limitato in banda** se la sua trasformata è nulla oltre una frequenza finita f_m, la **frequenza massima** del segnale:

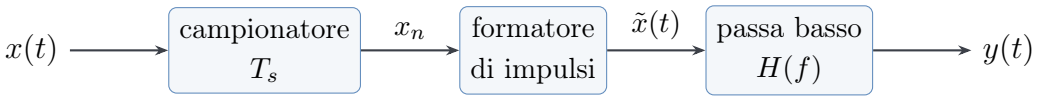
$$X(f) = 0 \quad \text{per } |f| > f_m.$$

La frequenza massima si legge dalla trasformata: si calcola $X(f)$ e si guarda fino a dove è diversa da zero. La larghezza di banda del Capitolo 3 è allora $W = 2f_m$, perché la banda va da $-f_m$ a f_m. Due casi già visti:

- $\text{sinc}(t) \longleftrightarrow \text{rect}(f)$, nulla per $|f| > \frac{1}{2}$: $f_m = \frac{1}{2}$;
- $\delta(t) \longleftrightarrow 1$, mai nulla: l'impulso **non** è limitato in banda e non si può campionare senza perdere informazione.

2 Teorema del campionamento

Per tornare dai campioni al segnale si usa la catena di ricostruzione: un formatore di impulsi seguito da un filtro passa basso.



Definizione – Formatore di impulsi

Il **formatore di impulsi** riceve la sequenza dei campioni e restituisce il segnale a tempo continuo

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \, \delta(t - nT_s),$$

un impulso in ogni istante di campionamento, con area uguale al campione.

Teorema – Teorema del campionamento (di Nyquist-Shannon), primo enunciato

Sia $x(t)$ un segnale a tempo continuo.

1. Se $x(t)$ è limitato in banda, con frequenza massima f_m,
2. e se la frequenza di campionamento soddisfa la **condizione di Nyquist**

$$F_s \geq 2f_m,$$

3. allora l'uscita della catena di ricostruzione, con il passa basso $H(f) = \frac{1}{F_s}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{F_s}\right)$, è il segnale di partenza: $y(t) = x(t)$.

Definizione – Frequenza di Nyquist

La **frequenza di Nyquist** di un segnale limitato in banda è la minima frequenza di campionamento ammessa dal teorema:

$$F_s^{\min} = 2f_m.$$

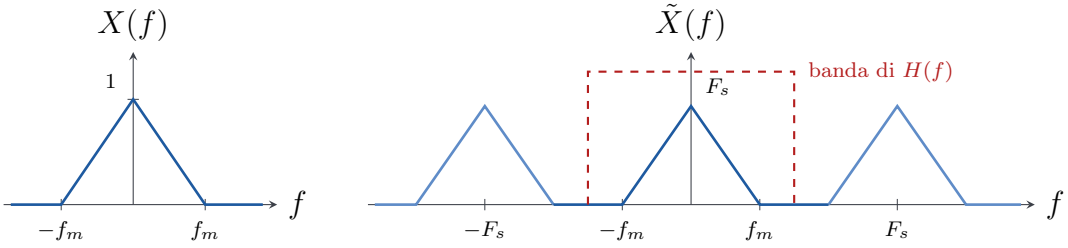
L'uguaglianza è esatta, non approssimata: se la condizione vale, campionare e ricostruire non introduce alcun errore. Per la sinc, con $f_m = \frac{1}{2}$, serve $F_s \geq 1\,\mathrm{Hz}$. Altri casi negli Esercizi 1, 2 e 3.

Dimostrazione

Si segue il segnale lungo la catena, in frequenza.

1. *Formatore.* Per la proprietà di campionamento dell'impulso, $x(nT_s)\,\delta(t-nT_s) = x(t)\,\delta(t-nT_s)$. Quindi
$$\tilde{x}(t) = \sum_n x(t)\,\delta(t-nT_s) = x(t)\,\Gamma_{T_s}(t),$$
il prodotto di $x(t)$ per il treno di impulsi di passo T_s.
2. *Trasformata.* Il prodotto diventa una convoluzione e $\Gamma_{T_s}(t) \longleftrightarrow F_s\,\Gamma_{F_s}(f)$ (Capitolo 3). La convoluzione con un impulso trasla $X(f)$:
$$\tilde{X}(f) = X(f) * F_s \sum_n \delta(f-nF_s) = F_s \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f-nF_s).$$
$\tilde{X}(f)$ è fatta di **repliche** di $X(f)$, centrate nei multipli di F_s e amplificate di F_s.
3. *Repliche separate.* La replica centrale occupa $[-f_m, f_m]$; la replica in F_s comincia in $F_s - f_m$. Le due non si sovrappongono se
$$F_s - f_m \geq f_m \iff F_s \geq 2f_m.$$
4. *Filtro.* $H(f)$ vale $\frac{1}{F_s}$ fra $-\frac{F_s}{2}$ e $\frac{F_s}{2}$ e zero fuori. Con le repliche separate, in questo intervallo c'è solo la replica centrale, intera, perché $f_m \leq \frac{F_s}{2}$:
$$Y(f) = H(f)\,\tilde{X}(f) = \frac{1}{F_s}\cdot F_s\,X(f) = X(f),$$
quindi $y(t) = x(t)$.

□



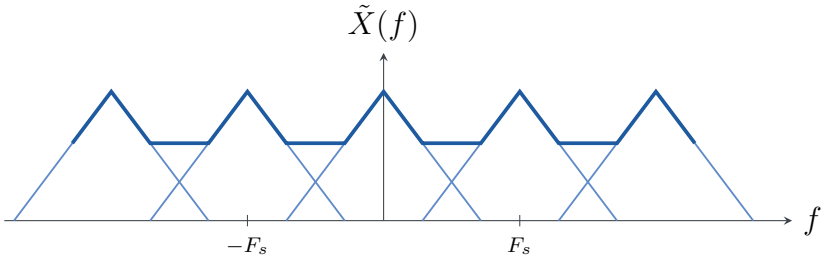
Nota

Nei sistemi reali la frequenza di campionamento è di solito fissata dal sistema, e con lei il filtro di ricostruzione. Il teorema dice allora quali segnali quel sistema tratta senza errori: quelli con $f_m \leq F_s/2$.

3 Aliasing

Definizione – Aliasing

Se $F_s < 2f_m$, le repliche di $X(f)$ in $\tilde{X}(f)$ si sovrappongono. Questa sovrapposizione si chiama **aliasing**: nessun filtro può più separare la replica centrale, e il segnale ricostruito è una versione distorta di $x(t)$.



Più F_s è bassa rispetto a $2f_m$, più le repliche entrano l'una nell'altra. La replica centrale si ricostruisce esattamente solo se il segnale rispetta l'ipotesi del teorema per la F_s del sistema.

Definizione – Filtro anti-aliasing

Il **filtro anti-aliasing** è un passa basso con banda $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right]$, applicato a $x(t)$ *prima* del campionatore. Taglia le frequenze oltre $F_s/2$, così il segnale campionato rispetta sempre la condizione di Nyquist.

Il filtro perde le componenti oltre $F_s/2$, ma evita che si ripieghino sulle frequenze basse: la parte del segnale sotto $F_s/2$ si ricostruisce senza distorsione.

4 Formula di ricostruzione

Teorema – Teorema del campionamento, secondo enunciato

Se $x(t)$ è limitato in banda e $F_s \geq 2f_m$, il segnale si ricostruisce dai soli campioni con la formula

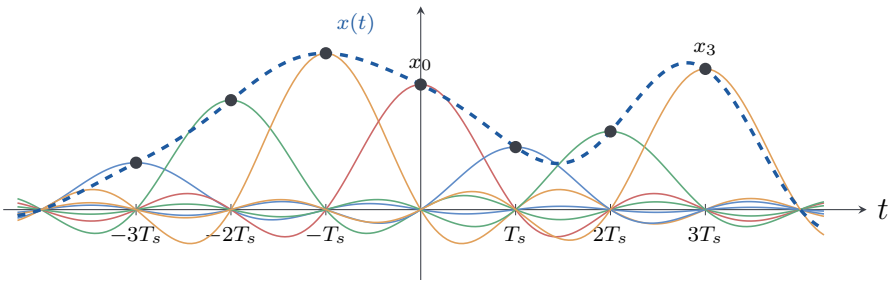
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right).$$

Dimostrazione

Si scrive la catena di ricostruzione nel tempo.

1. *Risposta impulsiva del filtro.* Da $\operatorname{sinc}(t) \longleftrightarrow \operatorname{rect}(f)$ e dalla scalatura con $\alpha = 1/T_s$:
$$H(f) = \frac{1}{F_s} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{F_s}\right) = T_s \operatorname{rect}(T_s f) \longleftrightarrow h(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right).$$
2. *Uscita.* L'uscita del filtro è la convoluzione di $\tilde{x}$ con h, e la convoluzione con $\delta(t - nT_s)$ trasla h in nT_s:
$$y(t) = \tilde{x}(t) * h(t) = \sum_n x_n \, \delta(t - nT_s) * \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) = \sum_n x_n \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right).$$
3. Per il primo enunciato $y(t) = x(t)$.

□



La formula **interpola** i campioni con infinite sinc, una per campione:

- la sinc del campione n è centrata in nT_s e alta x_n;
- si annulla in tutti gli altri istanti di campionamento kT_s, $k \neq n$, perché la sinc è nulla negli interi non nulli.

Quindi in $t = nT_s$ la somma vale esattamente x_n, e fra due campioni la somma delle sinc riempie il segnale.

Il campionamento serve a memorizzare un segnale e a elaborarlo con un elaboratore numerico, che tratta solo sequenze; il teorema garantisce che dalla sequenza si torna al segnale.

5 Conversione analogico-digitale

Definizione – Conversione analogico-digitale

La **conversione analogico-digitale** (A/D) trasforma un segnale analogico $x(t)$ in una sequenza di bit, in tre passi:

1. **campionamento**: discretizza il tempo;
2. **quantizzazione**: discretizza le ampiezze;
3. **codifica**: scrive ogni ampiezza con una parola di bit.

Segnale	Tempo	Ampiezze
analogico $x(t)$	continuo	continue
campionato $x[n]$	discreto	continue
quantizzato $x_q[n]$	discreto	discrete, in numero finito
digitale	sequenza di bit	

Il campionamento, se rispetta la condizione di Nyquist, non perde informazione. La quantizzazione invece sì, come si vede ora.

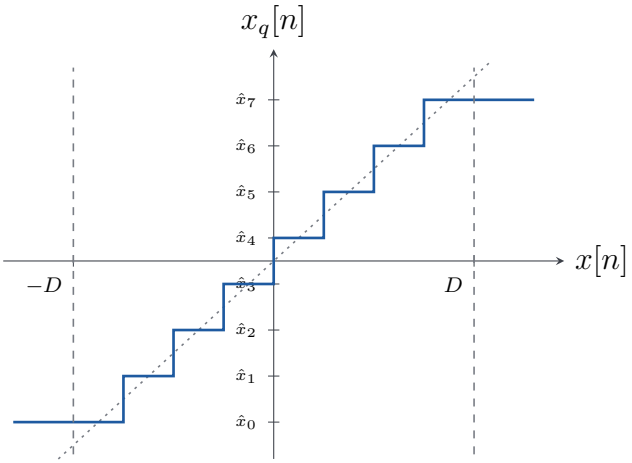
6 Quantizzazione

Definizione – Quantizzatore

Sia $|x_n| < D$: l'intervallo $[-D, D]$ è la **dinamica** del segnale. Il **quantizzatore** divide la dinamica in M **intervalli di quantizzazione** di ampiezza

$$\Delta = \frac{2D}{M},$$

e associa a ogni intervallo un valore, il **livello di restituzione** $\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{M-1}$, di solito il centro dell'intervallo. Ogni campione $x_n \in \mathbb{R}$ diventa il livello del proprio intervallo: $x_q[n] \in \{\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_{M-1}\}$.



Proposizione – Errore di quantizzazione

L'**errore di quantizzazione** è $e_q[n] = x[n] - x_q[n]$.

1. Dentro la dinamica, con i livelli nei centri degli intervalli,
$$|e_q[n]| \leq \frac{\Delta}{2} = \frac{D}{M}.$$
2. Fuori dalla dinamica il campione va nell'ultimo intervallo utile (**saturazione**) e l'errore è illimitato.

La quantizzazione **non è invertibile**: da $x_q[n]$ non si risale a $x[n]$, perché tutti i valori di un intervallo danno lo stesso livello. L'errore si riduce aumentando M, ma non si annulla.

Osservazione – Scelta della dinamica

Una dinamica larga evita la saturazione ma, a parità di M, allarga gli intervalli e quindi l'errore. Nei segnali reali, come l'audio, pochi valori anomali superano di molto il resto: conviene una dinamica che contenga quasi tutti i campioni e accettare la saturazione dei rari valori esterni.

7 Codifica

Proposizione – Bit per campione

Il **codificatore** scrive ogni livello con una parola di K bit. Con K bit ci sono 2^K parole, e ogni livello ne richiede una diversa:

$$M \leq 2^K \iff K \geq \log_2 M.$$

Il caso efficiente è $M = 2^K$, cioè $K = \log_2 M$: ogni parola corrisponde a un livello.

Se M non è una potenza di 2, K è il primo intero non minore di $\log_2 M$ e alcune parole restano inutilizzate: con $M = 7$ servono 3 bit, e una delle 8 parole non si usa.

La corrispondenza fra livelli e parole è la **tabella di codifica**. Con $M = 8$ e $K = 3$, in binario naturale:

livello	$\hat{x}_0$	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{x}_5$	$\hat{x}_6$	$\hat{x}_7$
parola	`000`	`001`	`010`	`011`	`100`	`101`	`110`	`111`

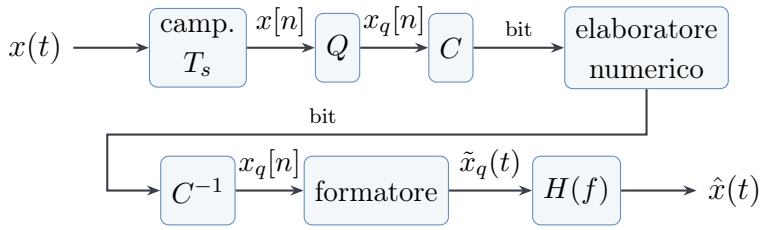
Esempio – Codifica e decodifica

Con la tabella, la sequenza quantizzata $\hat{x}_0, \hat{x}_2, \hat{x}_5$ diventa `000 010 101`. Per decodificare `010111011110` si divide la sequenza in blocchi di $K = 3$ bit, `010`, `111`, `011`, `110`, e si legge ogni blocco nella tabella: $\hat{x}_2, \hat{x}_7, \hat{x}_3, \hat{x}_6$.

La decodifica C^{-1}, se si conosce la tabella, è esatta: da ogni parola si torna al suo livello. Si torna però a $x_q[n]$, non a $x[n]$: l'errore di quantizzazione resta.

8 Conversione digitale-analogica e frequenza di bit

La **conversione digitale-analogica** (D/A) ripercorre la catena al contrario: decodifica e poi ricostruzione con formatore di impulsi e passa basso, come nel teorema del campionamento.



Proposizione – Errore della conversione

Il segnale ricostruito è diverso da quello di partenza, $\hat{x}(t) \neq x(t)$, per l'errore di quantizzazione: campionamento e ricostruzione sono esatti se $F_s \geq 2f_m$, la codifica e la decodifica sono esatte, la quantizzazione no. Aumentando M, $\hat{x}(t)$ si avvicina a $x(t)$.

Definizione – Frequenza di bit

La **frequenza di bit** F_b è il numero di bit al secondo prodotti dal convertitore A/D: F_s campioni al secondo, ciascuno di K bit,

$$F_b = KF_s \quad [\text{bit/s}].$$

Aumentare M riduce l'errore, ma richiede più bit per campione e quindi una frequenza di bit più alta: più memoria e più lavoro per l'elaboratore. La scelta di M è un compromesso fra errore di quantizzazione e frequenza di bit. Gli Esercizi 4–7 calcolano frequenze di bit, dimensioni e durate.

Riepilogo

- **Campionamento**: $x_n = x(nT_s)$, $F_s = 1/T_s$; banda limitata se $X(f) = 0$ per $|f| > f_m$.
- **Teorema, primo enunciato**: se $F_s \geq 2f_m$ (condizione di Nyquist), formatore e passa basso $\frac{1}{F_s}\,\mathrm{rect}(f/F_s)$ restituiscono $x(t)$.
- **Repliche**: $\tilde{x} = x\,\Gamma_{T_s}$, quindi $\tilde{X}(f) = F_s \sum_n X(f - nF_s)$; separate se $F_s - f_m \geq f_m$.
- **Aliasing**: con $F_s < 2f_m$ le repliche si sovrappongono; il filtro anti-aliasing taglia $x(t)$ a $F_s/2$ prima del campionatore.
- **Ricostruzione**: $x(t) = \sum_n x_n\,\mathrm{sinc}\big((t - nT_s)/T_s\big)$, con $h(t) = \mathrm{sinc}(t/T_s)$.
- **Quantizzazione**: $\Delta = 2D/M$; $|e_q| \leq \Delta/2$ nella dinamica, saturazione fuori; non invertibile.
- **Codifica**: $M \leq 2^K$, $K \geq \log_2 M$; tabella di codifica invertibile.
- **Frequenza di bit**: $F_b = KF_s$; più M riduce l'errore e alza F_b.

9 Esercizi

Esercizio 1 – Massimo passo di campionamento

Un segnale $x(t)$ ha frequenza massima di 20 kHz. Determina il massimo intervallo di campionamento che permette di ricostruire perfettamente il segnale.

Soluzione a pagina 12 →

Esercizio 2 – Campioni di un coseno

Dato $x(t) = 3\cos(2\pi 4t)$, quanti campioni bisogna prendere al minimo in un intervallo di 5 s per soddisfare il teorema del campionamento?

Soluzione a pagina 12 →

Esercizio 3 – Campioni di un segnale con trasformata rect

Il segnale $x(t)$ ha trasformata $X(f) = \mathrm{rect}(f/6)$. Quanti campioni bisogna prendere in un intervallo di 2 s per soddisfare il teorema del campionamento?

Soluzione a pagina 12 →

Esercizio 4 – Frequenza di bit di un CD

Un segnale audio va reso digitale per metterlo su CD. Si campiona a 40 kHz e si usano 16 bit per la codifica. Qual è la frequenza di bit?

Soluzione a pagina 12 →

Esercizio 5 – Dimensione di un brano

Un segnale audio di 3 minuti è campionato a 44,1 kHz e quantizzato con $M = 512$ intervalli. Trova la dimensione del segnale in bit.

Soluzione a pagina 12 →

Esercizio 6 – Durata massima su disco

Si campiona un segnale audio a 50 kHz con un quantizzatore di $M = 1024$ intervalli. Qual è la durata massima del segnale che si può salvare su un disco da 500 MB?

Soluzione a pagina 13 →

Esercizio 7 – Durata di un CD stereo

Un CD contiene segnali stereo, prodotti da due canali. Il segnale audio ha frequenza massima di circa 20 kHz ed è campionato a 44,1 kHz, con 16 bit per campione. Un CD contiene al massimo 750 MB. Qual è la durata massima di segnale audio che vi si può registrare?

Soluzione a pagina 13 →

10 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Massimo passo di campionamento

Per il teorema serve $F_s \geq 2f_m = 40\,\text{kHz}$. Il passo è il reciproco, quindi la condizione si ribalta:

$$T_s = \frac{1}{F_s} \leq \frac{1}{2f_m} = \frac{1}{40\,\text{kHz}} = \boxed{25\,\mu\text{s}}.$$

← *Torna all'Esercizio 1, pagina 10*

Soluzione dell'Esercizio 2 – Campioni di un coseno

La trasformata è $X(f) = \frac{3}{2}\big[\delta(f-4)+\delta(f+4)\big]$: nulla per $|f| > 4$, quindi $f_m = 4\,\text{Hz}$. Serve $F_s \geq 2f_m = 8\,\text{Hz}$, cioè almeno 8 campioni al secondo. In 5 s:

$$N_{\min} = 5 \cdot 8 = \boxed{40} \text{ campioni.}$$

← *Torna all'Esercizio 2, pagina 10*

Soluzione dell'Esercizio 3 – Campioni di un segnale con trasformata rect

$\text{rect}(f/6)$ vale 1 per $|f| < 3$ e zero fuori: $f_m = 3\,\text{Hz}$. Serve $F_s \geq 6\,\text{Hz}$, cioè $T_s \leq \frac{1}{6}\,\text{s}$. In 2 s:

$$N_{\min} = 2 \cdot 6 = \boxed{12} \text{ campioni.}$$

← *Torna all'Esercizio 3, pagina 10*

Soluzione dell'Esercizio 4 – Frequenza di bit di un CD

$$F_b = KF_s = 16 \cdot 40\,\text{kHz} = \boxed{640\,\text{kbit/s}} = 80\,\text{kB/s}.$$

← *Torna all'Esercizio 4, pagina 11*

Soluzione dell'Esercizio 5 – Dimensione di un brano

1. Campioni: $N = 180\,\text{s} \cdot 44\,100/\text{s} = 7\,938\,000$.
2. Bit per campione: $K = \log_2 512 = 9$.
3. Dimensione: $NK = 7\,938\,000 \cdot 9 = \boxed{71\,442\,000\,\text{bit}}$, cioè $8\,930\,250\,\text{B} \approx 8{,}9\,\text{MB}$.

← *Torna all'Esercizio 5, pagina 11*

Soluzione dell'Esercizio 6 – Durata massima su disco

1. Bit per campione: $K = \log_2 1024 = 10$.
2. Frequenza di bit: $F_b = KF_s = 10 \cdot 50\,\text{kHz} = 500\,\text{kbit/s}$.
3. Capacità: $500\,\text{MB} = 500 \cdot 10^6 \cdot 8 = 4 \times 10^9\,\text{bit}$.
4. Durata: $T_{\max} = \dfrac{4 \times 10^9\,\text{bit}}{5 \times 10^5\,\text{bit/s}} = \boxed{8000\,\text{s}} \approx 133{,}3\,\text{min}$.

← *Torna all'Esercizio 6, pagina 11*

Soluzione dell'Esercizio 7 – Durata di un CD stereo

1. Il campionamento è corretto: $F_s = 44{,}1\,\text{kHz} \geq 2f_m \approx 40\,\text{kHz}$.
2. Frequenza di bit, con due canali: $F_b = 2 \cdot KF_s = 2 \cdot 16 \cdot 44\,100 = 1\,411\,200\,\text{bit/s}$.
3. Capacità: $750\,\text{MB} = 750 \cdot 10^6 \cdot 8 = 6 \times 10^9\,\text{bit}$.
4. Durata: $T_{\max} = \dfrac{6 \times 10^9}{1\,411\,200}\,\text{s} \approx 4252\,\text{s} \approx \boxed{70{,}9\,\text{min}}$.

← *Torna all'Esercizio 7, pagina 11*