Appunti di Fondamenti di Comunicazioni e Internet

Canali 1 e 2 · Segnali · Prof.ssa Tiziana Cattai

Capitolo 3: Trasformata di Fourier

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

---

Argomenti: Analisi e sintesi · rect e sinc · simmetrie · linearità e dualità
Scalatura, traslazione e modulazione · impulso, costante, coseno e seno
Convoluzione e prodotto · tri e sinc^2 · segnali periodici e treno di impulsi
Banda · risposta in frequenza e filtri · modulatore e demodulatore

Indice

1 Trasformata e antitrasformata **1**

2 Trasformata della rect **2**

3 Proprietà **3**

3.1 Simmetrie 3

3.2 Linearità e dualità 3

3.3 Scalatura 4

3.4 Traslazione e modulazione 5

4 Trasformate notevoli **6**

5 Convoluzione e prodotto **8**

6 Segnali periodici **9**

7 Banda e larghezza di banda **10**

8 Risposta in frequenza e filtri **11**

9 Modulatore e demodulatore **12**

10 Esercizi **14**

11 Soluzioni **16**

1 Trasformata e antitrasformata

Definizione – Trasformata di Fourier

La **trasformata di Fourier** di un segnale a tempo continuo $x(t)$ è il segnale $X(f)$, funzione della frequenza $f \in \mathbb{R}$:

$$X(f) = \mathrm{FT}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, \mathrm{d}t.$$

L'**antitrasformata** riporta da $X(f)$ a $x(t)$:

$$x(t) = \mathrm{FT}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, \mathrm{d}f.$$

Si scrive $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ e si parla di **coppia** trasformata e antitrasformata.

La trasformata è l'operazione di **analisi**: scompone $x(t)$ in componenti alle frequenze f. L'antitrasformata è la **sintesi**: ricompone $x(t)$ sommando quelle componenti. Le lettere minuscole indicano i segnali nel tempo, le maiuscole le loro trasformate.

La frequenza viene dall'esponenziale complesso. Per la formula di Eulero $e^{-j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)$: moltiplicare $x(t)$ per l'esponenziale significa confrontarlo con un coseno e un seno che oscillano alla frequenza f. $X(f)$ dice quanto pesa in $x(t)$ la componente armonica a quella frequenza, per ogni f reale.

Nota – Quando si applica

- La definizione vale per i segnali a tempo continuo (CTFT, *continuous time Fourier transform*); non si applica alle sequenze.
- L'integrale converge per i segnali **impulsivi** (Capitolo 2), con $\int |x(t)|\, \mathrm{d}t < +\infty$: infatti $|X(f)| \leq \int |x(t)|\, \mathrm{d}t$.
- Costante, coseno e seno non sono impulsivi: le loro trasformate contengono impulsi e si ricavano dalle proprietà (Sezione 4).

In generale $X(f)$ è complessa anche quando $x(t)$ è reale, perché nell'integrale c'è un esponenziale complesso. Le simmetrie della Sezione 3 dicono quando è reale.

2 Trasformata della rect

Proposizione – Rect e sinc

Per una rect larga T e alta 1:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T\ \operatorname{sinc}(fT), \qquad \operatorname{rect}(t) \longleftrightarrow \operatorname{sinc}(f).$$

Dimostrazione

1. La rect vale 1 fra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$ e 0 fuori:

$$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{-j2\pi f} = \frac{1}{\pi f} \cdot \frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j}.$$

2. Per la formula di Eulero $\sin z = \dfrac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$, con $z = \pi fT$:

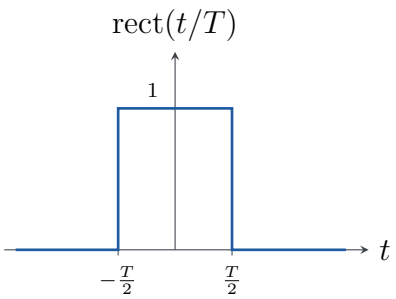
$$X(f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = T\,\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T\ \operatorname{sinc}(fT),$$

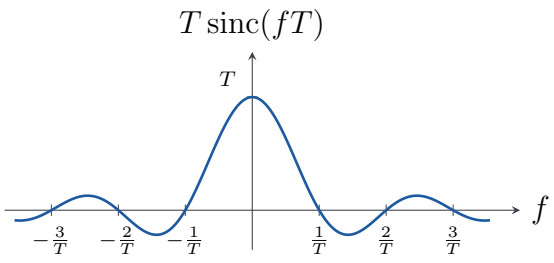
   moltiplicando e dividendo per T. In $f = 0$ l'integrale vale T, come $T\,\operatorname{sinc}(0)$.

3. Con $T = 1$ si ha $\operatorname{rect}(t) \longleftrightarrow \operatorname{sinc}(f)$.

□

La trasformata è una sinc nella variabile f, scalata in verticale e in orizzontale: in $f = 0$ vale T, l'area della rect, e si annulla nei multipli non nulli di $1/T$. Più la rect è stretta, più la sinc è larga. Altri casi nell'Esercizio 2.





3 Proprietà

3.1 Simmetrie

Proposizione – Simmetrie della trasformata

1. Se $x(t)$ è reale, $X(-f) = X^*(f)$: la parte reale di X è pari, la parte immaginaria è dispari (**simmetria hermitiana**).
2. Se $x(t)$ è reale e pari, $X(f)$ è reale e pari.

Dimostrazione

Con la formula di Eulero la definizione diventa

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\,\mathrm{d}t - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,\mathrm{d}t.$$

1. Con x reale il primo integrale è la parte reale e l'opposto del secondo è la parte immaginaria. Il coseno è pari in f e il seno è dispari, quindi la prima è pari e la seconda dispari.
2. Con x anche pari, $x(t)\sin(2\pi ft)$ è dispari in t e il suo integrale è nullo: X è reale, e pari per il punto 1.

□

La rect, la sinc, l'impulso e la costante sono reali e pari, e lo sono anche le loro trasformate. Un segnale reale ma non pari ha in generale una trasformata complessa: per esempio la rect traslata (Sezione 3.4).

3.2 Linearità e dualità

Proposizione – Linearità

Per ogni coppia di costanti a, b:

$$\mathrm{FT}\{a\,x(t) + b\,y(t)\} = a\,X(f) + b\,Y(f).$$

Lo stesso vale per l'antitrasformata.

Proposizione – Dualità

Da una coppia se ne ottiene un'altra, con i ruoli scambiati:

$$x(t) \longleftrightarrow X(f) \quad \Longrightarrow \quad X(t) \longleftrightarrow x(-f).$$

Se x è pari, $x(-f) = x(f)$ e lo scambio è diretto: $X(t) \longleftrightarrow x(f)$.

Dimostrazione

Si scrive l'antitrasformata con la variabile di integrazione ν e si valuta in $-f$:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)\, e^{-j2\pi\nu f}\, \mathrm{d}\nu.$$

Rinominando ν in t, è la trasformata di $X(t)$ calcolata in f. □

La dualità dimezza il lavoro: basta calcolare la più semplice delle due trasformate. Dalla rect, pari, si ha subito

$$\mathrm{sinc}(t) \longleftrightarrow \mathrm{rect}(f).$$

3.3 Scalatura

Proposizione – Scalatura

Per ogni $\alpha \neq 0$:

$$x(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|}\, X\Big(\frac{f}{\alpha}\Big).$$

Dimostrazione

Sia $\alpha > 0$. Con $t' = \alpha t$ si ha $t = t'/\alpha$ e $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'/\alpha$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t)\, e^{-j2\pi f t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')\, e^{-j2\pi \frac{f}{\alpha} t'}\, \mathrm{d}t' = \frac{1}{\alpha}\, X\Big(\frac{f}{\alpha}\Big).$$

Per $\alpha < 0$ gli estremi si scambiano e il segno meno che ne nasce dà $1/|\alpha|$. □

Comprimere il segnale nel tempo di un fattore $\alpha > 1$ allarga la trasformata dello stesso fattore e ne divide l'ampiezza per α. La coppia della rect larga T ne è un caso: $\mathrm{rect}(t/T)$ è $\mathrm{rect}(\alpha t)$ con $\alpha = 1/T$, e $T\ \mathrm{sinc}(fT)$ è $\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sinc}(f/\alpha)$.

3.4 Traslazione e modulazione

Proposizione – Traslazione nel tempo e in frequenza

1. Una **traslazione nel tempo** moltiplica la trasformata per un esponenziale complesso:
$$x(t-t_0) \longleftrightarrow X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}.$$
2. Moltiplicare il segnale per un esponenziale complesso (**modulazione**) trasla la trasformata:
$$x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f-f_0).$$

Dimostrazione

1. Con $t' = t - t_0$, $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$, l'esponenziale si divide in due fattori e quello costante esce dall'integrale:
$$\int x(t')\, e^{-j2\pi f(t'+t_0)}\, \mathrm{d}t' = e^{-j2\pi f t_0} \int x(t')\, e^{-j2\pi f t'}\, \mathrm{d}t' = e^{-j2\pi f t_0} X(f).$$
2. Si sommano gli esponenti:
$$\int x(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\, e^{-j2\pi f t}\, \mathrm{d}t = \int x(t)\, e^{-j2\pi (f-f_0) t}\, \mathrm{d}t = X(f-f_0).$$

□

I segni vanno tenuti: t_0 e f_0 entrano con il loro segno, e nelle due formule gli esponenziali hanno segni opposti. Nel dubbio si rifà il cambio di variabile, che è breve.

Esempio – Rect traslata, sinc traslata, rect modulata

- $\mathrm{rect}(t-t_0) \longleftrightarrow \mathrm{sinc}(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$: la trasformata è complessa, perché la rect traslata non è più pari.
- $\mathrm{sinc}(t+5) \longleftrightarrow \mathrm{rect}(f)\, e^{j10\pi f}$: qui $t_0 = -5$, quindi l'esponente ha il segno più.
- $\mathrm{rect}(t)\, e^{j10\pi t} = \mathrm{rect}(t)\, e^{j2\pi \cdot 5 t} \longleftrightarrow \mathrm{sinc}(f-5)$: la frequenza è $f_0 = 5$, non 10.

Altri casi nell'Esercizio 3.

4 Trasformate notevoli

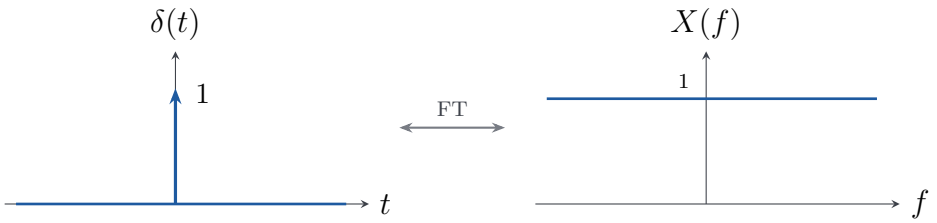
Proposizione – Impulso e costante

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1, \qquad C \longleftrightarrow C\,\delta(f), \qquad \delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}, \qquad e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f-f_0).$$

Dimostrazione

1. Per la proprietà di campionamento, $\int \delta(t)\, e^{-j2\pi f t}\, \mathrm{d}t$ vale l'esponenziale in $t = 0$, cioè 1.
2. L'impulso è pari: per dualità $1 \longleftrightarrow \delta(f)$, e per linearità $C \longleftrightarrow C\,\delta(f)$.
3. La terza è la traslazione nel tempo applicata a $\delta(t)$.
4. La quarta è la modulazione applicata a $x(t) = 1$, che ha $X(f) = \delta(f)$.

□



Proposizione – Coseno e seno

$$A\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{A}{2}\,\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\,\delta(f+f_0),$$

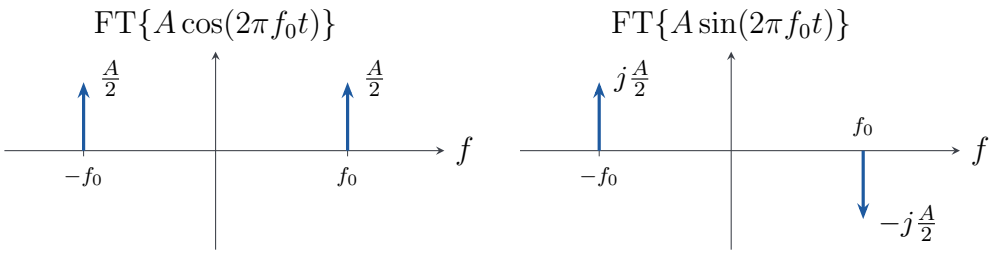
$$A\sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow -j\,\frac{A}{2}\,\delta(f-f_0) + j\,\frac{A}{2}\,\delta(f+f_0).$$

Dimostrazione

1. Con le formule di Eulero
$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j},$$
con $z = 2\pi f_0 t$ coseno e seno diventano somme di due esponenziali complessi, alle frequenze f_0 e $-f_0$.
2. Per linearità ogni esponenziale dà un impulso: $e^{\pm j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f \mp f_0)$.
3. Per il seno resta il fattore $\frac{A}{2j}$; moltiplicando numeratore e denominatore per j, con $j^2 = -1$, diventa $-j\frac{A}{2}$.

□

Il coseno, reale e pari, ha una trasformata reale e pari: due impulsi di area $\frac{A}{2}$ in $\pm f_0$. Il seno, reale e dispari, ha una trasformata immaginaria: due impulsi di area $\mp j\frac{A}{2}$ in $\pm f_0$, coerenti con la simmetria hermitiana. Esempi numerici nell'Esercizio 4.



Osservazione – Tempo e frequenza

Un segnale breve nel tempo ha una trasformata larga in frequenza, e viceversa.

- L'impulso, di durata nulla, ha trasformata costante, di durata infinita; la costante ha come trasformata un impulso.
- La rect, di durata finita, ha come trasformata una sinc, di durata infinita in senso stretto, con zeri più radi se la rect è più stretta.
- Il coseno, di durata infinita, ha come trasformata due impulsi.

La scalatura lo dice in generale: comprimere x di un fattore α allarga X dello stesso fattore.

5 Convoluzione e prodotto

Teorema – Convoluzione e prodotto

La convoluzione nel tempo diventa un prodotto in frequenza, e il prodotto nel tempo diventa una convoluzione in frequenza:

$$x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(f)\,Y(f), \qquad x(t)\,y(t) \longleftrightarrow X(f) * Y(f).$$

Dimostrazione

Si scrive la trasformata della convoluzione e si scambia l'ordine degli integrali:

$$\int \Big[\int x(\tau)\,y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big] e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}t = \int x(\tau)\Big[\int y(t-\tau)\,e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}t\Big]\,\mathrm{d}\tau.$$

L'integrale interno è la trasformata di y traslato di τ, cioè $Y(f)\,e^{-j2\pi f\tau}$. Resta $Y(f)\int x(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,\mathrm{d}\tau = X(f)\,Y(f)$. La seconda formula si ottiene allo stesso modo partendo dall'antitrasformata. □

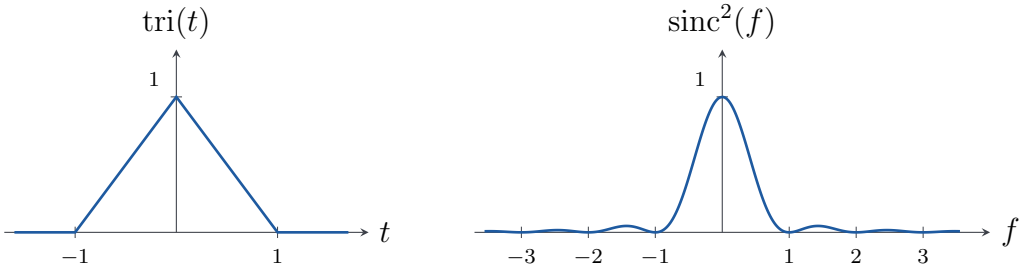
Per calcolare una convoluzione si può quindi trasformare i due segnali, moltiplicare le trasformate e antitrasformare: un prodotto è molto più semplice del calcolo grafico del Capitolo 2.

Proposizione – Tri e sinc al quadrato

$$\mathrm{tri}(t) \longleftrightarrow \mathrm{sinc}^2(f), \qquad \mathrm{sinc}^2(t) \longleftrightarrow \mathrm{tri}(f).$$

Dimostrazione

Nel Capitolo 2 si è visto che $\mathrm{tri}(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$. Per il teorema la trasformata è $\mathrm{sinc}(f)\cdot\mathrm{sinc}(f) = \mathrm{sinc}^2(f)$. La tri è pari, quindi per dualità $\mathrm{sinc}^2(t) \longleftrightarrow \mathrm{tri}(f)$.□



6 Segnali periodici

Proposizione – Serie di Fourier

Sia $x(t)$ periodico di periodo T, con **frequenza fondamentale** $F = 1/T$ e **armoniche** $f_n = nF$, n intero. Allora x è una somma di esponenziali complessi alle armoniche:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{j2\pi f_n t}, \qquad X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \, e^{-j2\pi f_n t} \, \mathrm{d}t.$$

I pesi X_n sono i **coefficienti della serie di Fourier**.

L'integrale per X_n si fa su un solo periodo, normalizzato per la sua durata, come la potenza dei segnali periodici nel Capitolo 2.

Proposizione – Trasformata di un segnale periodico

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, \delta(f - nF) :$$

impulsi nelle armoniche, con aree uguali ai coefficienti della serie.

Dimostrazione

Si trasforma la serie. Per linearità la trasformata entra nella somma, e ogni esponenziale $e^{j2\pi f_n t}$ ha come trasformata $\delta(f - f_n)$ (Sezione 4):

$$\mathrm{FT}\Big\{\sum_n X_n \, e^{j2\pi f_n t}\Big\} = \sum_n X_n \; \mathrm{FT}\big\{e^{j2\pi f_n t}\big\} = \sum_n X_n \, \delta(f - nF).$$

□

Gli impulsi $\delta(f - nF)$ sono gli stessi per ogni segnale di periodo T: per trasformare un segnale periodico basta calcolarne i coefficienti X_n. Per il coseno $A\cos(2\pi f_0 t)$, con $F = f_0$, i coefficienti sono $X_{\pm 1} = \frac{A}{2}$ e gli altri nulli, e si ritrova la coppia della Sezione 4.

Proposizione – Trasformata del treno di impulsi

Il treno di impulsi matematici $\Gamma_T(t) = \sum_k \delta(t - kT)$ (Capitolo 2) ha come trasformata un treno di impulsi in frequenza, di periodo $F = 1/T$ e area F:

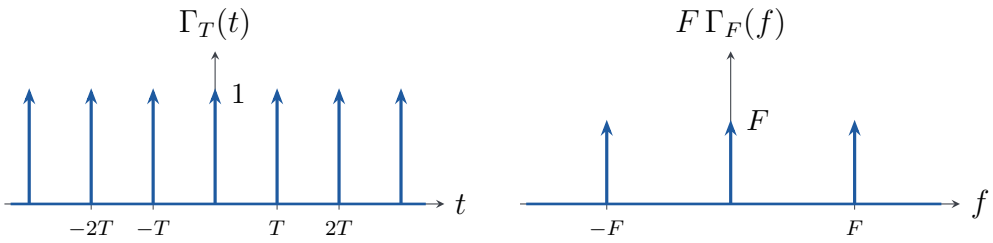
$$\Gamma_T(t) \longleftrightarrow F \, \Gamma_F(f) = F \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF).$$

Dimostrazione

Basta calcolare i coefficienti. Fra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$ il treno ha un solo impulso, $\delta(t)$, e per la proprietà di campionamento

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-j2\pi f_n t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\, e^0 = F$$

per ogni n. Nella trasformata del segnale periodico tutti gli impulsi hanno quindi area F. □



Più gli impulsi sono fitti nel tempo, più sono radi in frequenza: il passo T diventa $1/T$.

7 Banda e larghezza di banda

Definizione – Banda

La **banda** di un segnale $x(t)$ è l'insieme delle frequenze per cui la sua trasformata $X(f)$ è diversa da zero. La **larghezza di banda** W (*bandwidth*) è la misura della banda.

Banda e larghezza di banda sono, in frequenza, il supporto e la durata del Capitolo 1. Come per la durata, la definizione vale in senso stretto, se $X(f)$ si annulla davvero fuori da un intervallo, oppure in senso lato, se $X(f)$ tende soltanto a zero.

Per trovare la larghezza di banda di un segnale si calcola la sua trasformata e si guarda dove è diversa da zero:

- $\mathrm{sinc}(t) \longleftrightarrow \mathrm{rect}(f)$, diversa da zero fra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$: $W = 1$;
- $\delta(t) \longleftrightarrow 1$, diversa da zero per ogni f: $W = +\infty$.

L'impulso, brevissimo nel tempo, ha banda infinita; la sinc, di durata infinita in senso stretto, ha banda limitata. È l'osservazione «Tempo e frequenza» della Sezione 4, ora detta con la larghezza di banda: più un segnale dura, più è stretta la sua banda.

8 Risposta in frequenza e filtri

Definizione – Risposta in frequenza

La **risposta in frequenza** $H(f)$ di un filtro, detta anche **funzione di trasferimento**, è la trasformata della sua risposta impulsiva: $H(f) = \mathrm{FT}\{h(t)\}$.

Proposizione – Uscita di un filtro in frequenza

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \longleftrightarrow \quad Y(f) = H(f)\,X(f).$$

L'uscita nel tempo è l'antitrasformata, $y(t) = \mathrm{FT}^{-1}\{H(f)\,X(f)\}$.

Così il calcolo di un'uscita diventa: trasformare x e h, disegnare $X(f)$ e $H(f)$, moltiplicarle punto per punto e antitrasformare. Il prodotto è molto più semplice della convoluzione, a mano e anche al calcolatore. Molti filtri, inoltre, si descrivono meglio con $H(f)$ che con $h(t)$: dicono che cosa fanno a ogni frequenza.

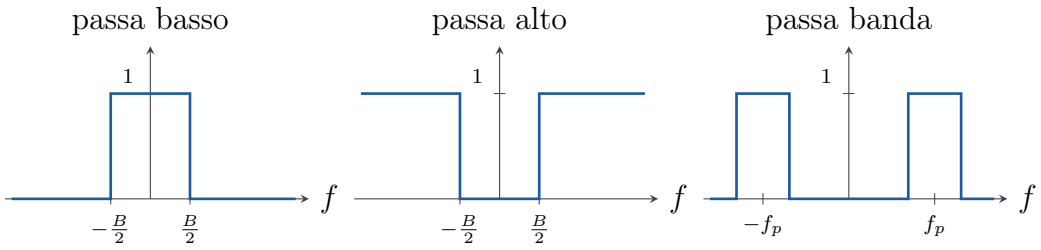
Proposizione – Filtri passa basso, passa alto e passa banda

1. **Passa basso**, banda B centrata nell'origine:
$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \longleftrightarrow h(t) = B\ \mathrm{sinc}(Bt).$$
2. **Passa alto**, che toglie la banda B centrata nell'origine:
$$H(f) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \longleftrightarrow h(t) = \delta(t) - B\ \mathrm{sinc}(Bt).$$
3. **Passa banda**, due bande larghe B centrate in $\pm f_p$:
$$H(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f - f_p}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f + f_p}{B}\right) \longleftrightarrow h(t) = 2B\ \mathrm{sinc}(Bt)\cos(2\pi f_p t).$$

Dimostrazione

1. Da $\mathrm{sinc}(t) \longleftrightarrow \mathrm{rect}(f)$, con la scalatura $\alpha = B$: $\mathrm{sinc}(Bt) \longleftrightarrow \frac{1}{B}\mathrm{rect}(f/B)$, quindi $B\ \mathrm{sinc}(Bt) \longleftrightarrow \mathrm{rect}(f/B)$.
2. Per linearità, con $\delta(t) \longleftrightarrow 1$.
3. Per la modulazione, $B\ \mathrm{sinc}(Bt)\,e^{\pm j2\pi f_p t} \longleftrightarrow \mathrm{rect}\big((f \mp f_p)/B\big)$. La somma dei due esponenziali è $2\cos(2\pi f_p t)$.

□



Moltiplicare $X(f)$ per una rect alta 1 lascia $X(f)$ dov'è la rect e dà zero fuori. Quindi:

- il **passa basso** lascia passare inalterate le componenti di frequenza bassa in modulo, $|f| < B/2$, e annulla le altre;
- il **passa alto** fa il contrario: annulla le componenti con $|f| < B/2$ e lascia quelle alte in modulo; serve, per esempio, su un mezzo trasmissivo con molto rumore alle basse frequenze;
- il **passa banda** lascia passare solo le componenti nelle due bande attorno a $\pm f_p$.

Il passa basso restringe la banda del segnale, e quindi, nel tempo, lo allarga: la sua risposta impulsiva, una sinc, ha durata infinita. Per questi filtri $h(t)$ si calcola, ma si usa poco: il filtro si descrive e si applica in frequenza. L'Esercizio 1 calcola un'uscita in questo modo.

9 Modulatore e demodulatore

Proposizione – Modulatore

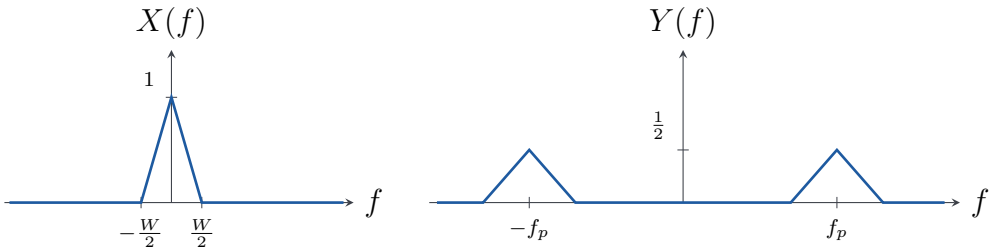
Un **modulatore** moltiplica il segnale $x(t)$ per un coseno alla **frequenza portante** f_p:

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_p t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{1}{2}X(f - f_p) + \frac{1}{2}X(f + f_p).$$

Dimostrazione

Con la formula di Eulero $y(t) = \frac{1}{2}x(t)\,e^{j2\pi f_p t} + \frac{1}{2}x(t)\,e^{-j2\pi f_p t}$. Per linearità e per la modulazione della Sezione 3.4, ogni termine trasla $X(f)$ di $\pm f_p$. □

Il modulatore sposta il contenuto in frequenza di x dalla sua banda di partenza a due repliche, alte la metà, centrate in $\pm f_p$: il coseno «porta» il segnale in un'altra banda, da cui il nome portante. Così si trasmette nella banda assegnata, si evitano bande con molta interferenza e si mettono più segnali sullo stesso mezzo senza che le loro bande si sovrappongano, scegliendo per ciascuno una diversa f_p.



Proposizione – Demodulatore

Il **demodulatore** moltiplica $y(t)$ per $2\cos(2\pi f_p t)$, con la stessa portante, e poi applica un filtro passa basso. Dopo la moltiplicazione

$$z(t) = 2\,x(t)\cos^2(2\pi f_p t) = x(t) + x(t)\cos(2\pi\, 2f_p t),$$

$$Z(f) = X(f) + \frac{1}{2}X(f - 2f_p) + \frac{1}{2}X(f + 2f_p).$$

Il passa basso tiene $X(f)$ e toglie le due repliche: in uscita c'è di nuovo $x(t)$.

Dimostrazione

1. Per la formula di duplicazione $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\big(1 + \cos 2\alpha\big)$, quindi $2\cos^2(2\pi f_p t) = 1 + \cos(2\pi\, 2f_p t)$.
2. Il primo termine dà $X(f)$; il secondo è un modulatore con portante $2f_p$, che dà le due repliche alte $\frac{1}{2}$ in $\pm 2f_p$.

□

Il fattore 2 fa riapparire $X(f)$ alla sua altezza, e la seconda moltiplicazione porta le repliche a $\pm 2f_p$, lontane dall'origine se la portante è grande. Se $X(f)$ è nulla per $|f| > W/2$, le repliche occupano le frequenze fra $2f_p - W/2$ e $2f_p + W/2$, e fra i loro opposti. Un passa basso di banda B con

$$W \le B \le 4f_p - W$$

lascia passare tutta $X(f)$ e toglie le repliche; un tale B esiste se $f_p \ge W/2$.

Riepilogo

- **Trasformata**: $X(f) = \int x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, \mathrm{d}t$ (analisi); $x(t) = \int X(f)\, e^{j2\pi ft}\, \mathrm{d}f$ (sintesi); x reale $\Rightarrow X(-f) = X^*(f)$.
- **Rect e dualità**: $\mathrm{rect}(t/T) \longleftrightarrow T\,\mathrm{sinc}(fT)$; $X(t) \longleftrightarrow x(-f)$, quindi $\mathrm{sinc}(t) \longleftrightarrow \mathrm{rect}(f)$.
- **Scalatura, traslazione, modulazione**: $x(\alpha t) \longleftrightarrow \frac{1}{|\alpha|}X(f/\alpha)$; $x(t - t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi ft_0}$; $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f - f_0)$.
- **Notevoli**: $\delta \leftrightarrow 1$; $C \leftrightarrow C\delta(f)$; $A\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{A}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$; seno con $\mp j\frac{A}{2}$.
- **Convoluzione e prodotto**: $x * y \leftrightarrow XY$, $xy \leftrightarrow X * Y$; $\mathrm{tri}(t) \leftrightarrow \mathrm{sinc}^2(f)$.
- **Periodici**: $X(f) = \sum_n X_n\, \delta(f - nF)$; $\Gamma_T(t) \leftrightarrow F\,\Gamma_F(f)$, con $F = 1/T$.
- **Banda e filtri**: W è la misura di $\{f : X(f) \neq 0\}$; $Y(f) = H(f)X(f)$; passa basso $\mathrm{rect}(f/B) \leftrightarrow B\,\mathrm{sinc}(Bt)$, passa alto $1 - \mathrm{rect}(f/B)$, passa banda con due rect in $\pm f_p$.
- **Modulatore e demodulatore**: $x(t)\cos(2\pi f_p t) \leftrightarrow \frac{1}{2}X(f - f_p) + \frac{1}{2}X(f + f_p)$; per tornare a x si moltiplica per $2\cos(2\pi f_p t)$ e si filtra con un passa basso.

10 Esercizi

Esercizio 1 – Uscita di un filtro passa basso

Il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}^2(t)\left[1 - e^{j2\pi 5t}\right]$ entra in un filtro con risposta impulsiva $h(t) = 2\,\mathrm{sinc}(3t)$. Calcola l'uscita $y(t)$.

Soluzione a pagina 16 →

Esercizio 2 – Rect e sinc scalate

Calcola e disegna la trasformata di Fourier di (a) $x(t) = \mathrm{rect}(t/2)$; (b) $x(t) = \mathrm{sinc}(2t)$.

Soluzione a pagina 16 →

Esercizio 3 – Impulso e sinc traslati

Calcola la trasformata di Fourier, con modulo e fase, di (a) $x(t) = \delta(t - 1000)$; (b) $x(t) = \mathrm{sinc}(t + 1)$.

Soluzione a pagina 17 →

Esercizio 4 – Seno e coseno

Calcola e disegna la trasformata di Fourier di (a) $x(t) = \sin(2\pi\, 5t)$; (b) $x(t) = \cos(2\pi\, 3t)$.

Soluzione a pagina 17 →

11 Soluzioni

Soluzione dell'Esercizio 1 – Uscita di un filtro passa basso

Ingresso. Si distribuisce il prodotto: $x(t) = \text{sinc}^2(t) - \text{sinc}^2(t)\, e^{j2\pi 5t}$. Per linearità, con $\text{sinc}^2(t) \longleftrightarrow \text{tri}(f)$ e la modulazione con $f_0 = 5$:

$$X(f) = \text{tri}(f) - \text{tri}(f-5).$$

La prima tri va da -1 a 1; la seconda va da 4 a 6, ribaltata verso il basso dal segno meno.

Filtro. Da $\text{sinc}(t) \longleftrightarrow \text{rect}(f)$ e la scalatura con $\alpha = 3$:

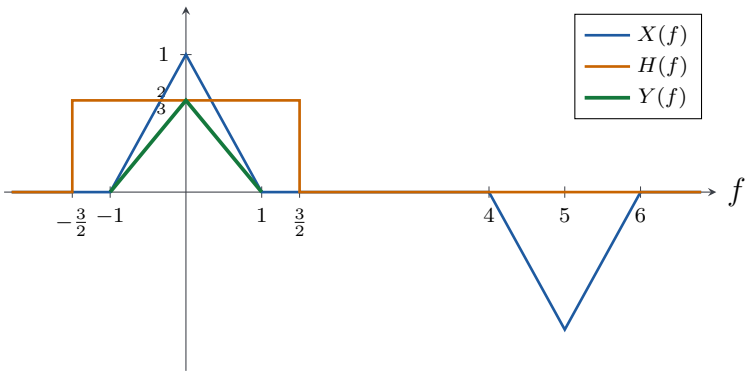
$$H(f) = 2 \cdot \frac{1}{3}\,\text{rect}\Big(\frac{f}{3}\Big) = \frac{2}{3}\,\text{rect}\Big(\frac{f}{3}\Big),$$

un passa basso alto $\frac{2}{3}$ fra $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

Prodotto. $\text{tri}(f)$ sta tutta dentro la rect, dove $H = \frac{2}{3}$; $\text{tri}(f-5)$ sta dove $H = 0$. Quindi

$$Y(f) = H(f)\,X(f) = \frac{2}{3}\,\text{tri}(f) \longleftrightarrow \boxed{y(t) = \frac{2}{3}\,\text{sinc}^2(t)}.$$

Il filtro toglie la componente centrata in $f = 5$ e lascia l'altra.



← *Torna all'Esercizio 1, pagina 14*

Soluzione dell'Esercizio 2 – Rect e sinc scalate

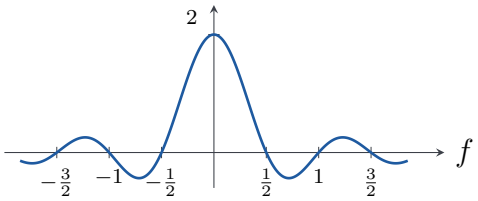
(a) È la rect larga $T = 2$: $X(f) = 2\,\text{sinc}(2f)$. Vale 2 in $f = 0$ e si annulla in $f = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \ldots$

(b) Per dualità $\text{sinc}(t) \longleftrightarrow \text{rect}(f)$; per la scalatura con $\alpha = 2$

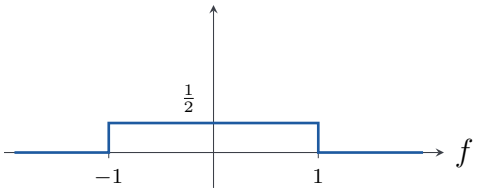
$$X(f) = \frac{1}{2}\,\text{rect}\Big(\frac{f}{2}\Big),$$

alta $\frac{1}{2}$ fra $f=-1$ e $f=1$. Controllo: $X(0)=\frac{1}{2}$ è l'area di $\operatorname{sinc}(2t)$, metà di quella di $\operatorname{sinc}(t)$, che vale $\operatorname{rect}(0)=1$.

(a) $2\operatorname{sinc}(2f)$



(b) $\frac{1}{2}\operatorname{rect}(f/2)$



← *Torna all'Esercizio 2, pagina 14*

Soluzione dell'Esercizio 3 – Impulso e sinc traslati

(a) $\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$ con $t_0=1000$:

$$X(f)=e^{-j2000\pi f}.$$

Il modulo vale 1 per ogni f, come per l'impulso non traslato; la fase $-2000\pi f$ è una retta. La traslazione cambia solo la fase.

(b) $\operatorname{sinc}(t) \longleftrightarrow \operatorname{rect}(f)$ e la traslazione è $t_0=-1$:

$$X(f)=\operatorname{rect}(f)\,e^{j2\pi f}.$$

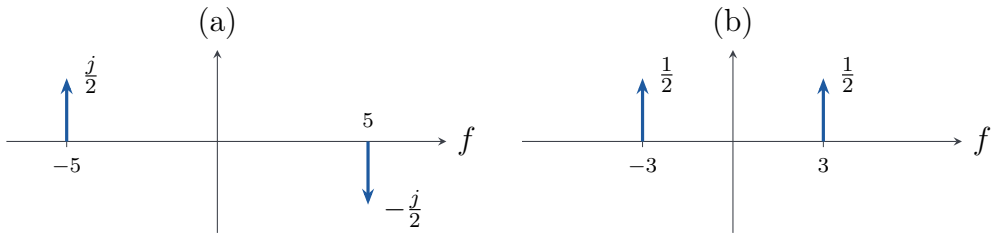
Il modulo è $\operatorname{rect}(f)$: 1 per $|f|<\frac{1}{2}$, 0 fuori. Dove il modulo non è nullo la fase è la retta $2\pi f$, da $-\pi$ a π.

← *Torna all'Esercizio 3, pagina 14*

Soluzione dell'Esercizio 4 – Seno e coseno

(a) Seno con $A=1$ e $f_0=5$: $X(f)=-\frac{j}{2}\,\delta(f-5)+\frac{j}{2}\,\delta(f+5)$, due impulsi di area immaginaria, $\frac{j}{2}$ in -5 e $-\frac{j}{2}$ in 5.

(b) Coseno con $A=1$ e $f_0=3$: $X(f)=\frac{1}{2}\,\delta(f-3)+\frac{1}{2}\,\delta(f+3)$, due impulsi di area $\frac{1}{2}$ in ± 3.



← *Torna all'Esercizio 4, pagina 15*