

# Appunti di Fondamenti di Comunicazioni e Internet

Canali 1 e 2 · Segnali · Prof.ssa Tiziana Cattai

## Capitolo 2: Energia, potenza, impulso e convoluzione

Autore: Tommaso C.

---

Appunti tratti dalle lezioni in aula e dal materiale del corso

---

Argomenti: Energia e potenza · segnali di energia, impulsivi e di potenza · SNR  
Energia di rect, tri ed esponenziale · potenza di costante, coseno e treno di impulsi  
Scalature e traslazioni · impulso matematico · convoluzione

## Indice

|          |                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Energia e potenza</b>                              | <b>1</b>  |
| 1.1      | Rapporto segnale-rumore . . . . .                     | 2         |
| <b>2</b> | <b>Energia di segnali elementari</b>                  | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Potenza di segnali di durata infinita</b>          | <b>4</b>  |
| <b>4</b> | <b>Energia e potenza dopo scalature e traslazioni</b> | <b>6</b>  |
| <b>5</b> | <b>Impulso matematico</b>                             | <b>7</b>  |
| <b>6</b> | <b>Convoluzione</b>                                   | <b>8</b>  |
| <b>7</b> | <b>Esercizi</b>                                       | <b>11</b> |
| <b>8</b> | <b>Soluzioni</b>                                      | <b>12</b> |

## 1 Energia e potenza

### Definizione – Energia

L'**energia** di un segnale è l'integrale del suo modulo quadro su tutto l'asse dei tempi; per una sequenza l'integrale diventa una somma:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \quad E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2.$$

### Definizione – Potenza

La **potenza** è il limite dell'energia su una finestra centrata nell'origine, divisa per la durata della finestra:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt, \quad P_x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2.$$

Energia e potenza sono reali e non negative, e possono valere  $+\infty$ . Per un segnale reale il modulo si può togliere,  $|x(t)|^2 = x^2(t)$ ; serve per i segnali complessi.

La potenza è il **valore medio** di  $|x(t)|^2$  su tutto l'asse dei tempi (Capitolo 1), cioè l'energia media per unità di tempo.

### Definizione – Segnali di energia, impulsivi e di potenza

- $x$  è un **segnale di energia** se  $0 < E_x < +\infty$ .
- $x$  è **impulsivo** se  $0 < \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$ .
- $x$  è un **segnale di potenza** se  $0 < P_x < +\infty$ .

Le classi di energia e impulsiva si sovrappongono largamente ma non coincidono: per sapere a quale classe appartiene un segnale si calcolano i due integrali (Esercizio 1).

### Proposizione – Energia e potenza a confronto

1. Un segnale di energia ha potenza nulla:  $E_x < +\infty \Rightarrow P_x = 0$ .
2. Un segnale di potenza ha energia infinita:  $P_x > 0 \Rightarrow E_x = +\infty$ .
3. Un segnale limitato e di durata finita, non nullo, è di energia e impulsivo.

Quindi nessun segnale è insieme di energia e di potenza.

## Dimostrazione

Sia  $E_T = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$  l'energia nella finestra, così che  $P_x = \lim E_T/T$ .

1.  $E_T \leq E_x$  per ogni  $T$ , quindi  $0 \leq E_T/T \leq E_x/T \rightarrow 0$ .
2. Se  $P_x > 0$ , per  $T$  grande  $E_T$  è circa  $P_x T$ , che tende a  $+\infty$ ; e  $E_x = \lim E_T$ .
3. Se  $|x(t)| \leq M$  e il supporto ha durata  $D_x$ , allora  $E_x \leq M^2 D_x$  e  $\int |x(t)| dt \leq M D_x$ , entrambi finiti.

□

Il rumore che si somma al segnale nel canale dura indefinitamente: è un segnale di potenza e si descrive con la sua potenza.

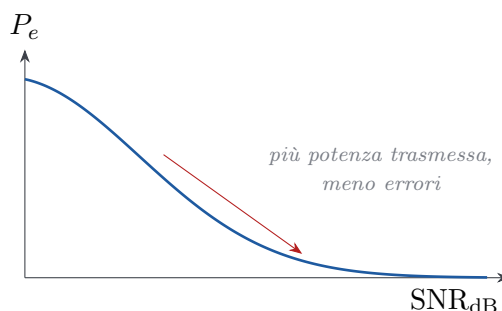
## 1.1 Rapporto segnale-rumore

## Definizione – Rapporto segnale-rumore

Il **rapporto segnale-rumore** (SNR, *signal-to-noise ratio*) è il rapporto fra la potenza  $P_s$  del segnale utile e la potenza  $P_r$  del rumore. Di solito si esprime in decibel:

$$\text{SNR} = \frac{P_s}{P_r}, \quad \text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_r}.$$

La **probabilità di errore**  $P_e$  è la probabilità che il ricevitore riceva un messaggio diverso da quello trasmesso, per esempio 1 al posto di 0. Le curve misurate di un ricevitore, con l'SNR in ascissa e  $P_e$  in ordinata, sono decrescenti: per ridurre  $P_e$  bisogna aumentare l'SNR, cioè, se il rumore non si può ridurre, trasmettere con più potenza. La forma esatta dipende dal mezzo e dal sistema.



## 2 Energia di segnali elementari

### Proposizione – Energia di rect e tri

$$E_{\text{rect}} = 1, \quad E_{\text{tri}} = \frac{2}{3}.$$

Entrambi sono segnali di energia.

### Dimostrazione

1.  $\text{rect}(t)$  è reale e vale 1 fra  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$ , 0 fuori; il suo quadrato è lo stesso rettangolo, quindi  $E_{\text{rect}} = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \, dt = 1$ .
2.  $\text{tri}(t)$  è nullo fuori da  $[-1, 1]$  ed è pari: si integra la metà destra, dove  $\text{tri}(t) = 1 - t$ , e si moltiplica per 2, così il modulo sparisce.
3.  $E_{\text{tri}} = 2 \int_0^1 (1 - t)^2 \, dt = 2 \int_0^1 (1 - 2t + t^2) \, dt = 2(1 - 1 + \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ .

□

Per un segnale fatto di rettangoli l'energia è l'area di  $x^2(t)$ : per ogni tratto si eleva al quadrato l'altezza e si moltiplica per la base. Con  $2\text{rect}(t)$ , per esempio,  $E = 2^2 \cdot 1 = 4$ . Se il segnale è una somma o un prodotto, conviene prima disegnarlo: dove due addendi si sovrappongono si sommano le altezze e poi si eleva al quadrato (Sezione 4).

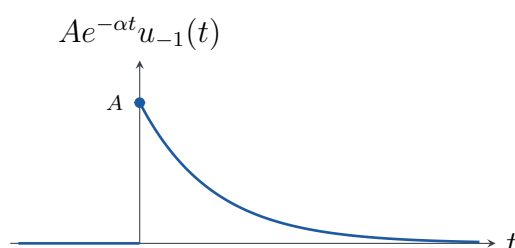
### Esempio – Esponenziale unilatero

$x(t) = A e^{-\alpha t} u_{-1}(t)$ , con  $A$  reale non nullo e  $\alpha > 0$ . Il gradino annulla il segnale per  $t < 0$ ; per  $t \geq 0$  resta l'esponenziale, che parte da  $A$  e tende a 0. La durata è infinita.

$$E_x = \int_0^{+\infty} A^2 e^{-2\alpha t} \, dt = A^2 \left[ \frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \right]_0^{+\infty} = \frac{A^2}{2\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \, dt = \frac{|A|}{\alpha}.$$

È di energia e impulsivo, pur avendo durata infinita.

L'esponenziale tende a zero abbastanza in fretta da avere area finita sotto  $x^2(t)$ : i segnali che tendono rapidamente a zero sono spesso di energia (Esercizio 2). Un'energia negativa segnala sempre un errore di calcolo.



### 3 Potenza di segnali di durata infinita

#### Esempio – Segnale costante

$x(t) = C$  per ogni  $t$ , con  $C$  reale non nullo. L'area sotto  $C^2$  e quella sotto  $|C|$  sono infinite, quindi il segnale non è né di energia né impulsivo. La potenza è finita:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} C^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{C^2 T}{T} = C^2.$$

È un segnale di potenza.

#### Definizione – Segnale periodico

Un segnale è **periodico** di periodo  $T_0$  se è la somma delle repliche di un segnale  $g(t)$  traslate dei multipli di  $T_0$ :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT_0),$$

e quindi  $x(t + T_0) = x(t)$  per ogni  $t$ .

#### Proposizione – Potenza di un segnale periodico

Un segnale periodico non nullo è un segnale di potenza, e la sua potenza si calcola su un solo periodo:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt.$$

La finestra  $[-T/2, T/2]$  della definizione contiene circa  $T/T_0$  periodi uguali, quindi la media su tutto l'asse è la media su un periodo. L'integrale si può fare su qualunque intervallo lungo  $T_0$ , scegliendo quello più comodo.

#### Proposizione – Potenza del coseno

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \implies P_x = \frac{A^2}{2}.$$

### Dimostrazione

Il periodo è  $T_0 = 1/f_0$  e il segnale è reale.

1. Con  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$ :

$$P_x = \frac{A^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \frac{A^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)] dt.$$

2. Il primo termine dà  $\frac{A^2}{2T_0} \cdot T_0 = \frac{A^2}{2}$ .
3. Il secondo è l'integrale di un coseno su due suoi periodi interi, che vale 0.

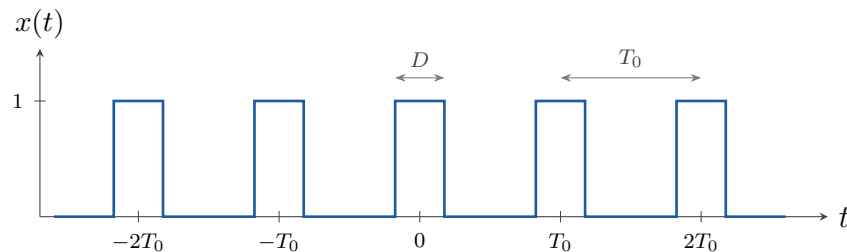
□

### Definizione – Treno di impulsi rettangolari

Il **treno di impulsi rettangolari** è il segnale periodico di periodo  $T_0$  che ripete una rect alta 1 e larga  $D \leq T_0$ , centrata nei multipli di  $T_0$ :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_0}{D}\right).$$

Il rapporto  $D/T_0 \leq 1$  è il **duty cycle**: la frazione del periodo in cui il segnale è alto.



### Proposizione – Potenza del treno di impulsi rettangolari

La potenza è uguale al duty cycle:

$$P_x = \frac{D}{T_0}.$$

### Dimostrazione

Nel periodo  $[-T_0/2, T_0/2]$  c'è solo la rect centrata in 0, che vale 1 fra  $-D/2$  e  $D/2$  e 0 altrove:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-D/2}^{D/2} 1^2 dt = \frac{1}{T_0} \left( \frac{D}{2} + \frac{D}{2} \right) = \frac{D}{T_0}.$$

□

## 4 Energia e potenza dopo scalature e traslazioni

### Proposizione – Effetto di scalature e traslazioni

| operazione                                        | energia           | potenza           |
|---------------------------------------------------|-------------------|-------------------|
| scalatura verticale $y(t) = a x(t)$               | $E_y =  a ^2 E_x$ | $P_y =  a ^2 P_x$ |
| traslazione $y(t) = x(t - t_0)$ , $y_n = x_{n-M}$ | $E_y = E_x$       | $P_y = P_x$       |
| scalatura dei tempi $y(t) = x(at)$ , $a \neq 0$   | $E_y = E_x/ a $   | $P_y = P_x$       |

### Dimostrazione

Si sostituisce  $y$  nelle definizioni.

1.  $|a x(t)|^2 = |a|^2 |x(t)|^2$ , e la costante  $|a|^2$  esce dall'integrale e dal limite.
2. Con  $u = t - t_0$  l'integrale su tutto  $\mathbb{R}$  non cambia: il grafico di  $|x|^2$  si sposta, la sua area no. Nella potenza la finestra si sposta di  $t_0$ , e per  $T \rightarrow +\infty$  lo spostamento non conta.
3. Con  $u = at$ ,  $dt = du/|a|$  (per  $a < 0$  gli estremi si scambiano), quindi  $E_y = E_x/|a|$ . Nella potenza la finestra  $[-T/2, T/2]$  diventa  $[-|a|T/2, |a|T/2]$ , lunga  $|a|T$ :

$$P_y = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{|a|T} \int_{-|a|T/2}^{|a|T/2} |x(u)|^2 du = P_x.$$

□

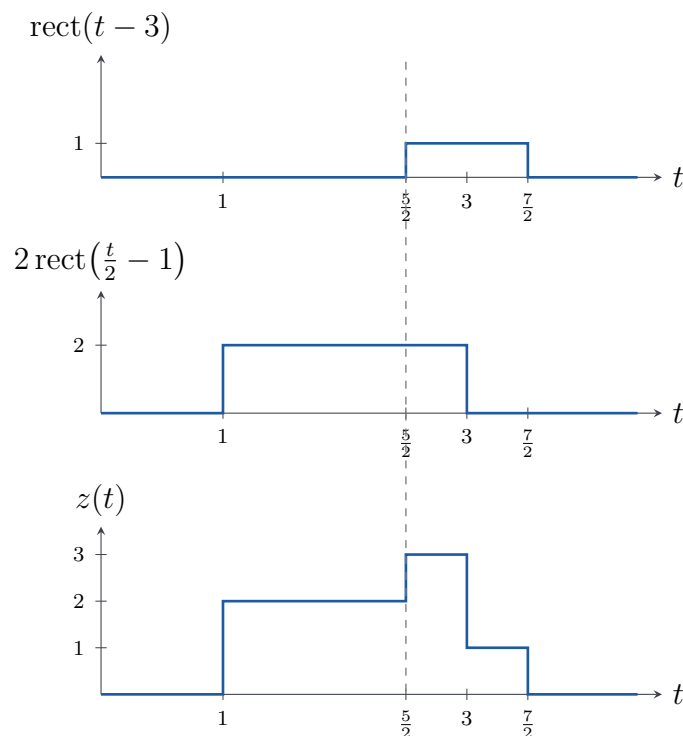
Comprimere un segnale di un fattore  $a > 1$  ne divide la durata e quindi l'energia per  $a$ : per esempio  $\text{tri}(2t)$  ha energia  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ . La potenza è un'energia per unità di tempo e resta uguale.

### Esempio – Energia di una somma di rect

$$z(t) = \text{rect}(t - 3) + 2\text{rect}\left(\frac{t}{2} - 1\right).$$

1.  $\text{rect}(t - 3)$  è alto 1 fra  $\frac{5}{2}$  e  $\frac{7}{2}$ .
2.  $2\text{rect}\left(\frac{t}{2} - 1\right) = 2\text{rect}\left(\frac{1}{2}(t - 2)\right)$  ha centro 2, durata 2 e altezza 2: vale 2 fra 1 e 3.
3. I supporti si sovrappongono fra  $\frac{5}{2}$  e 3, dove le altezze si sommano:  $z$  vale 2 in  $(1, \frac{5}{2})$ , 3 in  $(\frac{5}{2}, 3)$ , 1 in  $(3, \frac{7}{2})$ .

$$E_z = 2^2 \cdot \frac{3}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 6 + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 11.$$



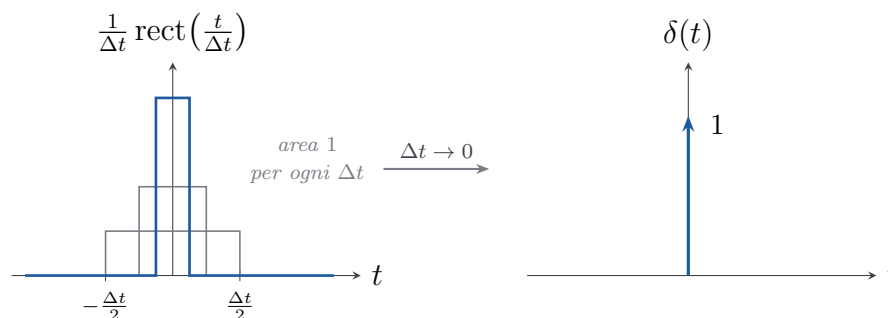
## 5 Impulso matematico

### Definizione – Impulso matematico

L'**impulso matematico** (o impulso a tempo continuo)  $\delta(t)$  è il limite di rettangoli di area 1 sempre più stretti e più alti:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta t}\right).$$

La  $\text{rect}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$  è larga  $\Delta t$  e alta  $1/\Delta t$ , quindi ha area 1 per ogni  $\Delta t$ . Al limite la durata tende a zero e l'ampiezza a  $+\infty$ . Si disegna con una **freccia** verso l'alto nel punto in cui è centrato, con accanto l'area.



L'impulso discreto  $\delta_n$  (Capitolo 1) vale 1 in  $n = 0$ ; l'impulso matematico non ha un valore in  $t = 0$ , e ad essere 1 è la sua **area**.

**Nota – Una funzione generalizzata**

$\delta(t)$  non è una funzione definita punto per punto: non ha senso chiedere quanto valgono  $\delta(t)$  o  $x(t)\delta(t)$  in un istante. È una **funzione generalizzata**: il suo effetto si vede solo sotto il segno di integrale, moltiplicata per un altro segnale  $x(t)$ , detto **segnale di test**.

**Proposizione – Proprietà dell'impulso**

- **Area:**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$  e  $\int_{-\infty}^{+\infty} a \delta(t) dt = a$ .

- **Campionamento:** se  $x(t)$  è continuo in  $t_0$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0).$$

L'impulso traslato  $\delta(t - t_0)$  è centrato in  $t_0$ , e l'integrale “pesca” dal segnale di test il solo valore in quell'istante: per questo la proprietà si chiama di **campionamento**. Si vede dalla definizione: l'integrale di  $x(t)$  per la rect di area 1 larga  $\Delta t$  attorno a  $t_0$  è il valore medio di  $x$  su quell'intervallo, che per  $\Delta t \rightarrow 0$  tende a  $x(t_0)$ . Con  $x(t) = 1$  si ritrova l'area.

**Esempio – Un campione fuori dal supporto**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t) \delta(t - 1) dt = \text{rect}(1) = 0,$$

perché l'impulso è in  $t = 1$ , dove la rect è nulla.

Altri casi nell'Esercizio 4.

## 6 Convoluzione

**Definizione – Convoluzione**

La **convoluzione** di due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  è il segnale

$$\varphi_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau.$$

La variabile di integrazione è  $\tau$ ;  $t$  è un parametro, e per ogni  $t \in \mathbb{R}$  l'integrale dà un valore del segnale  $\varphi_{xy}$ .

È la terza operazione fra due segnali, dopo somma e prodotto, ma non si fa punto per punto: il valore in  $t$  dipende da tutto  $x$  e da tutto  $y$ .

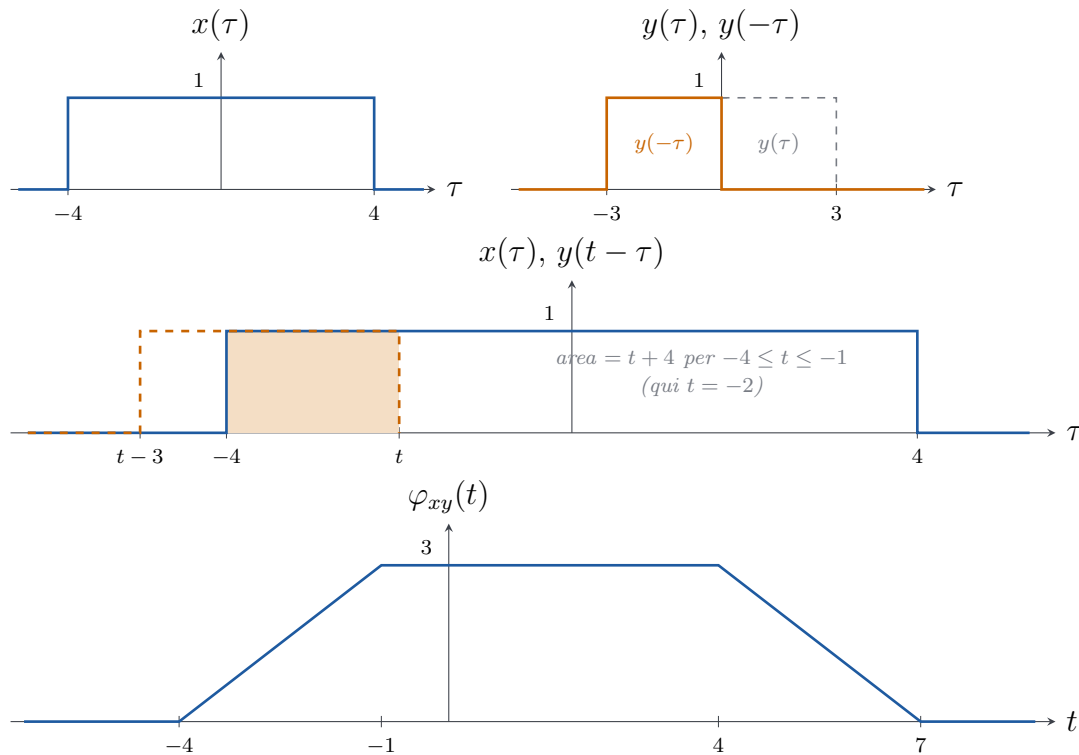
### Proposizione – Calcolare una convoluzione

1. Si disegnano  $x$  e  $y$  in funzione di  $\tau$ :  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$ .
2. Si ribalta  $y$  rispetto all'asse delle ordinate:  $y(-\tau)$ .
3. Si trasla  $y(-\tau)$  di  $t$ , verso destra se  $t > 0$  e verso sinistra se  $t < 0$ : è  $y(t - \tau)$ .
4. Si moltiplica  $x(\tau) y(t - \tau)$  e se ne calcola l'area, che è  $\varphi_{xy}(t)$ .
5. Si ripete per ogni  $t$ , dividendo l'asse in intervalli in cui la sovrapposizione ha la stessa forma.

### Esempio – Convoluzione di due rect

$x(t)$  vale 1 fra  $-4$  e  $4$ ,  $y(t)$  vale 1 fra  $0$  e  $3$ , cioè  $x(t) = \text{rect}(t/8)$ ,  $y(t) = \text{rect}((t - \frac{3}{2})/3)$ . Ribaltata e traslata,  $y(t - \tau)$  vale 1 fra  $t - 3$  e  $t$ , e il prodotto vale 1 dove i due supporti si sovrappongono. L'integrale è la lunghezza della sovrapposizione:

| intervallo          | sovrapposizione  | $\varphi_{xy}(t)$ |
|---------------------|------------------|-------------------|
| $t < -4$            | nessuna          | 0                 |
| $-4 \leq t \leq -1$ | da $-4$ a $t$    | $t + 4$           |
| $-1 \leq t \leq 4$  | da $t - 3$ a $t$ | 3                 |
| $4 \leq t \leq 7$   | da $t - 3$ a $4$ | $7 - t$           |
| $t > 7$             | nessuna          | 0                 |



### Riepilogo

- **Energia e potenza:**  $E_x = \int |x|^2$ ;  $P_x = \lim \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x|^2$ , il valore medio di  $|x|^2$ ; per le sequenze somme, con  $2N + 1$  campioni.
- **Classi:** di energia  $0 < E_x < \infty$ , impulsivo  $0 < \int |x| < \infty$ , di potenza  $0 < P_x < \infty$ ; energia finita  $\Rightarrow P_x = 0$ .
- **SNR:**  $P_s/P_r$ , in dB  $10 \log_{10}(P_s/P_r)$ ;  $P_e$  cala se l'SNR cresce.
- **Energie:**  $E_{\text{rect}} = 1$ ,  $E_{\text{tri}} = \frac{2}{3}$ ,  $E = A^2/(2\alpha)$  per  $Ae^{-\alpha t}u_{-1}(t)$ .
- **Potenze:** costante  $C^2$ ; periodico su un periodo; coseno  $A^2/2$ ; treno di rect  $D/T_0$ , il duty cycle.
- **Trasformazioni:**  $ax$  moltiplica  $E$  e  $P$  per  $|a|^2$ ; la traslazione non cambia nulla;  $x(at)$  divide  $E$  per  $|a|$  e lascia  $P$ .
- **Impulso:** limite di rect di area 1;  $\int x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$ .
- **Convoluzione:**  $\int x(\tau) y(t - \tau) d\tau$ : ribaltare  $y$ , traslare di  $t$ , integrare il prodotto.

## 7 Esercizi

### Esercizio 1 – Impulsivo ma non di energia

Mostra che  $x(t) = \text{rect}(t) |t|^{-1/2}$  è impulsivo ma non è un segnale di energia.

*Soluzione a pagina 12 →*

### Esercizio 2 – Esponenziale bilatero

Verifica se  $x(t) = A e^{-\alpha|t|}$ , con  $A > 0$  e  $\alpha > 0$ , è impulsivo e se è un segnale di energia.

*Soluzione a pagina 12 →*

### Esercizio 3 – Energia di una somma di tri

Calcola l'energia di  $z(t) = \text{tri}(t - \frac{1}{2}) + \text{tri}(t + \frac{1}{2})$ .

*Soluzione a pagina 12 →*

### Esercizio 4 – Proprietà di campionamento

Calcola

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int \text{tri}^2(t) \delta(t - \tfrac{1}{3}) dt, & \text{(b)} \quad & \int [\text{tri}^2(t) + \text{rect}(t)] \delta(t + \tfrac{1}{4}) dt, \\ \text{(c)} \quad & \int 2 \text{rect}(t) \delta(t - \tfrac{1}{4}) dt, & \text{(d)} \quad & \int \text{tri}(t) \delta(t) dt, \\ \text{(e)} \quad & \int \text{tri}(t) \delta(t + \tfrac{1}{4}) dt, \end{aligned}$$

con gli integrali estesi a tutto  $\mathbb{R}$ .

*Soluzione a pagina 13 →*

## 8 Soluzioni

### Soluzione dell'Esercizio 1 – Impulsivo ma non di energia

Il segnale è nullo per  $|t| > \frac{1}{2}$ , vale  $|t|^{-1/2}$  per  $0 < |t| < \frac{1}{2}$  ed è pari. Diverge in  $t = 0$ ; il valore in un solo punto non conta negli integrali.

**Impulsivo.** Con la simmetria,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = 2 \int_0^{1/2} t^{-1/2} dt = 2 \left[ 2\sqrt{t} \right]_0^{1/2} = 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2},$$

finito e positivo.

**Energia.**  $|x(t)|^2 = 1/|t|$  per  $0 < |t| < \frac{1}{2}$ :

$$E_x = 2 \int_0^{1/2} \frac{dt}{t} = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln \frac{1}{2} - \ln \varepsilon) = +\infty.$$

L'energia è infinita, quindi il segnale non è di energia, pur avendo durata finita: non è limitato.

[← Torna all'Esercizio 1, pagina 11](#)

### Soluzione dell'Esercizio 2 – Esponenziale bilatero

Il segnale è pari, quindi si integra su  $t \geq 0$ , dove  $x(t) = A e^{-\alpha t}$ , e si moltiplica per 2. Come per l'esponenziale unilatero (Sezione 2), ciascuna metà dà  $A^2/(2\alpha)$  di energia e  $A/\alpha$  di integrale del modulo:

$$E_x = 2 \cdot \frac{A^2}{2\alpha} = \frac{A^2}{\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = 2 \cdot \frac{A}{\alpha} = \frac{2A}{\alpha}.$$

Entrambi sono finiti e positivi: il segnale è impulsivo e di energia.

[← Torna all'Esercizio 2, pagina 11](#)

### Soluzione dell'Esercizio 3 – Energia di una somma di tri

**Disegno.**  $\text{tri}(t + \frac{1}{2})$  ha vertice in  $-\frac{1}{2}$  ed è diverso da zero fra  $-\frac{3}{2}$  e  $\frac{1}{2}$ ;  $\text{tri}(t - \frac{1}{2})$  ha vertice in  $\frac{1}{2}$ , fra  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{2}$ . Si sommano i due tratti dove si sovrappongono:

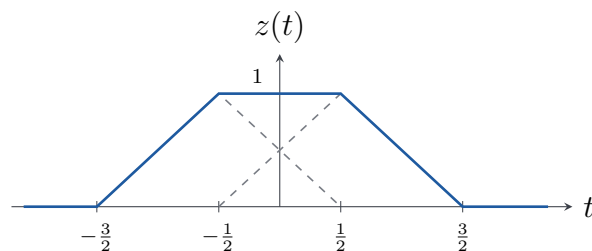
- per  $-\frac{3}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2}$  c'è solo il primo:  $z(t) = t + \frac{3}{2}$ ;
- per  $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$  il primo scende e il secondo sale:  $z(t) = (\frac{1}{2} - t) + (\frac{1}{2} + t) = 1$ ;
- per  $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$  c'è solo il secondo:  $z(t) = \frac{3}{2} - t$ .

È un trapezio: due rampe di durata 1 e un tratto costante alto 1 e lungo 1.

**Energia.** Le due rampe hanno la stessa energia di metà tri, cioè  $\int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$  ciascuna; il tratto costante dà  $1^2 \cdot 1 = 1$ :

$$E_z = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

Sommare le energie dei due tri,  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ , darebbe un risultato sbagliato, perché i supporti si sovrappongono.



← Torna all'Esercizio 3, pagina 11

#### Soluzione dell'Esercizio 4 – Proprietà di campionamento

In ogni caso l'integrale vale il segnale di test nel punto in cui è centrato l'impulso:  $\delta(t - t_0)$  è in  $t_0$ , quindi  $\delta(t + \frac{1}{4})$  è in  $-\frac{1}{4}$ .

- (a)  $\text{tri}^2(\frac{1}{3}) = (1 - \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9}$ .
- (b)  $\text{tri}^2(-\frac{1}{4}) + \text{rect}(-\frac{1}{4}) = (\frac{3}{4})^2 + 1 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}$ .
- (c)  $2 \text{rect}(\frac{1}{4}) = 2$ , perché  $\frac{1}{4}$  è dentro la rect.
- (d)  $\text{tri}(0) = 1$ .
- (e)  $\text{tri}(-\frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

← Torna all'Esercizio 4, pagina 11