

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 30: Due teoremi fondamentali del calcolo

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Media integrale · Integrale orientato · Funzione integrale · Primitive

Indice

1	Teorema della media integrale	1
2	Integrabilita' locale e integrale orientato	1
3	Primo teorema fondamentale	2
4	Primitive e secondo teorema fondamentale	3

Teorema della media integrale

Definizione – Media integrale (Def. 30.1)

Se $f \in \mathcal{R}([a, b])$ e $a < b$, la media integrale di f e'

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Teorema – Teorema della media integrale (Teo. 30.2)

Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$ e poniamo $m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$. Allora

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq M.$$

Se inoltre f e' continua, esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b-a).$$

Dimostrazione

Da $m \leq f \leq M$, per monotonia e linearita' dell'integrale,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Se f e' continua, assume minimo e massimo e, per il teorema dei valori intermedi, assume anche il valore della media. Se la media coincide con un estremo, la funzione non negativa $f - m$ o $M - f$ ha integrale nullo e deve essere identicamente nulla; in tal caso ogni punto interno e' adatto. $\square$

Integrabilita' locale e integrale orientato

Definizione – Integrabilita' locale e orientamento (Def. 30.3)

Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, con I intervallo, e' localmente Riemann-integrabile se la sua restrizione a ogni intervallo compatto $[u, v] \subseteq I$ e' integrabile. Per $a, b \in I$ si definisce

$$\int_a^b f = \begin{cases} \text{integrale usuale su } [a, b], & a < b, \\ 0, & a = b, \\ - \int_b^a f, & a > b. \end{cases}$$

Proposizione – Proprieta' dell'integrale orientato (Prop. 30.4)

Se f e' localmente integrabile su I , per ogni $a, b, c \in I$ valgono

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f, \quad \left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|.$$

Per una costante α , $\int_a^b \alpha dx = \alpha(b - a)$, qualunque sia l'ordine degli estremi.

Definizione – Funzione integrale (Def. 30.5)

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrabile e sia $a \in I$. La funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

si chiama funzione integrale di f con punto iniziale a . Per ogni $x, y \in I$,

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) dt.$$

Primo teorema fondamentale

Teorema – Primo teorema fondamentale del calcolo (Teo. 30.6)

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ localmente Riemann-integrabile e $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Allora F e' continua su I . Inoltre, in ogni punto $x_0 \in I$ in cui f e' continua, F e' derivabile e

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

In particolare, se f e' continua su I , allora $F' = f$ su tutto I .

Dimostrazione

Su un intervallo compatto vicino a x_0 , f e' limitata da una costante M . Quindi

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq M |x - x_0|,$$

che prova la continuita'. Se f e' continua in x_0 , per $h \neq 0$

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt.$$

Il modulo e' al piu' il massimo di $|f(t) - f(x_0)|$ tra x_0 e $x_0 + h$, che tende a zero per continuita'. $\square$

Esercizio Svolto

Sia

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

L'integranda è continua, quindi $F'(x) = 1/(1+x^2)$ e $F(0) = 0$. Poiché anche $\arctan x$ ha queste proprietà, l'unicità delle primitive mostrata in seguito darà $F(x) = \arctan x$.

Primitive e secondo teorema fondamentale

Definizione – Primitiva (Def. 30.7)

Una funzione $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva di $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ se è derivabile su I e $G'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

Dal primo teorema fondamentale segue che ogni funzione continua su un intervallo possiede almeno una primitiva.

Proposizione – Unicità a meno di costanti (Prop. 30.8)

Se F e G sono primitive della stessa funzione su un intervallo I , allora esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $G = F + C$ su I .

Dimostrazione

La funzione $H = G - F$ ha derivata nulla su I . Il criterio di costanza, che discende dal teorema di Lagrange, implica che H è costante. L'ipotesi che il dominio sia un intervallo è essenziale: su componenti separate si potrebbero scegliere costanti diverse. $\square$

Teorema – Secondo teorema fondamentale del calcolo (Teo. 30.9)

Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia G una sua primitiva. Per ogni $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Dimostrazione

Fissato a , la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f$ è una primitiva di f . Dunque $F - G$ è costante. Valutando in a , $0 = F(a) = G(a) + C$, perciò $F(x) = G(x) - G(a)$. Ponendo $x = b$ si ottiene la formula. $\square$

Definizione – Integrale indefinito (Def. 30.10)

L'integrale indefinito di f su un intervallo I è l'insieme di tutte le sue primitive e

si scrive

$$\int f(x) \, dx = G(x) + C,$$

dove G e' una primitiva fissata e $C \in \mathbb{R}$ e' arbitraria.

Esercizio Svolto

Poiche' $G(x) = x^4/4 - 2x$ e' una primitiva di $x^3 - 2$,

$$\int_{-1}^2 (x^3 - 2) \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x \right]_{-1}^2 = 0 - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}.$$

Il segno negativo esprime che l'area orientata sotto l'asse prevale.