

# Appunti di Analisi Matematica I

## Capitolo 23: Studio del grafico di funzione

**Autore: Tommaso C.**

---

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

---

Argomenti: Asintoti · Flessi · Metodo di studio · Distanza punto-retta

## Indice

|          |                                                    |          |
|----------|----------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Asintoti</b>                                    | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Punti di flesso</b>                             | <b>1</b> |
| <b>3</b> | <b>Studio di funzione: metodo ed esercizi</b>      | <b>2</b> |
| <b>4</b> | <b>Complementi: distanza punto-retta nel piano</b> | <b>3</b> |

## Asintoti

### Definizione – Asintoto verticale (Def. 23.1)

La retta  $x = x_0$  è asintoto verticale per  $f$  se almeno uno tra i limiti  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  vale  $+\infty$  o  $-\infty$ .

### Definizione – Asintoto orizzontale (Def. 23.2)

La retta  $y = \ell$  è asintoto orizzontale a destra, rispettivamente a sinistra, se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell, \quad \text{rispettivamente} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell.$$

### Definizione – Asintoto obliquo (Def. 23.3)

La retta  $y = mx + q$ , con  $m \neq 0$ , è asintoto per  $x \rightarrow +\infty$  o  $x \rightarrow -\infty$  se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0.$$

Se esiste, i coefficienti sono necessariamente

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx].$$

Un asintoto orizzontale esclude un asintoto obliquo nella stessa direzione, ma il comportamento a  $+\infty$  può differire da quello a  $-\infty$ .

## Punti di flesso

### Definizione – Punto di flesso (Def. 23.4)

Un punto interno  $x_0$  del dominio è un punto di flesso se la funzione cambia convessità attraversando  $x_0$ . Se esiste la tangente, il punto del grafico  $(x_0, f(x_0))$  si chiama flesso a tangente orizzontale, obliqua o verticale secondo la tangente.

### Proposizione – Condizione necessaria (Prop. 23.5)

Se  $x_0$  è un flesso interno e  $f''(x_0)$  esiste, allora  $f''(x_0) = 0$ .

La condizione non è sufficiente: per  $f(x) = x^4$ ,  $f''(0) = 0$  ma la funzione è convessa su entrambi i lati.

### Proposizione – Criterio del cambio di segno (Prop. 23.6)

Se  $f$  è continua in  $x_0$  e  $f''$  ha segno opposto nei due lati di  $x_0$ , allora  $x_0$  è un flesso. Equivalentemente, se  $f'$  ha in  $x_0$  un estremo locale e  $f$  è derivabile in  $x_0$ , la tangente attraversa localmente il grafico.

Per  $f(x) = x^3$ ,  $f''(x) = 6x$  cambia da negativo a positivo: l'origine e' un flesso a tangente orizzontale.

## Studio di funzione: metodo ed esercizi

### Procedura Schema completo

1. Determinare dominio, eventuali simmetrie, periodicit  e intersezioni con gli assi.
2. Studiare il segno e i limiti ai bordi del dominio e all'infinito.
3. Cercare asintoti verticali, orizzontali e obliqui.
4. Calcolare  $f'$ , intervalli di monotonia ed estremi locali o assoluti.
5. Calcolare  $f''$ , intervalli di convessita' e concavita' e flessi.
6. Riunire le informazioni rispettando continuit , valori e comportamento ai bordi; solo allora tracciare il grafico.

### Esercizio Svolto

Studiamo  $f(x) = x + 1/x$ .

- Il dominio e'  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  e la funzione e' dispari.
- $x = 0$  e' asintoto verticale; poich   $f(x) - x = 1/x \rightarrow 0$ ,  $y = x$  e' asintoto obliquo in entrambe le direzioni.
- $f'(x) = 1 - 1/x^2$ : la funzione cresce su  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  e decresce su  $(-1, 0) \cup (0, 1)$ . Ha massimo locale  $f(-1) = -2$  e minimo locale  $f(1) = 2$ .
- $f''(x) = 2/x^3$ : e' concava su  $(-\infty, 0)$  e convessa su  $(0, +\infty)$ . Lo zero non appartiene al dominio, quindi non e' un flesso.

Questi dati determinano i due rami del grafico.

### Nota Controlli di coerenza

Un massimo locale deve essere compatibile col segno di  $f'$ ; un flesso richiede un punto del dominio; un asintoto descrive un limite e non e' una barriera che il grafico non possa attraversare.

## Complementi: distanza punto-retta nel piano

### Teorema – Distanza di un punto da una retta (Teo. 23.7)

Sia  $P = (x_0, y_0)$  e sia  $r$  la retta  $ax + by + c = 0$ , con  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Allora

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Il vettore  $(a, b)$  è normale alla retta. La distanza è il modulo della proiezione sul versore normale della differenza tra  $P$  e un punto qualsiasi di  $r$ , da cui segue la formula.

### Esercizio Svolto

La distanza di  $P = (2, -1)$  dalla retta  $3x - 4y + 5 = 0$  è

$$\frac{|3 \cdot 2 - 4(-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3.$$