

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 21: Teoremi di Fermat, Rolle e Lagrange

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Estremi locali · Valor medio · Accrescimenti finiti · Monotonia

Indice

1	Teorema di Fermat	1
2	Teoremi di Rolle e Lagrange	1
3	Conseguenze del teorema di Lagrange	2

Teorema di Fermat

Definizione – Punti interni e di frontiera (Def. 21.1)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto x_0 e' interno ad A se esiste un intorno di x_0 contenuto in A . E' di frontiera se ogni suo intorno interseca sia A sia il complementare $\mathbb{R} \setminus A$.

Definizione – Estremo locale e punto critico (Def. 21.2)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in A$ e' di massimo locale se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in A \cap U$; il minimo locale si definisce invertendo la disuguaglianza. Un punto interno del dominio e' critico se $f'(x_0) = 0$ oppure se f non e' derivabile in x_0 .

Teorema – Regola di Fermat (Teo. 21.3)

Sia x_0 un punto interno di $A \subseteq \mathbb{R}$. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e' derivabile in x_0 e ha in x_0 un massimo o minimo locale, allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione

Supponiamo che x_0 sia un massimo. Per $h > 0$ piccolo il rapporto $[f(x_0 + h) - f(x_0)]/h$ e' non positivo; per $h < 0$ piccolo e' non negativo. Passando ai due limiti laterali, la derivabilita' impone $f'(x_0) \leq 0$ e $f'(x_0) \geq 0$, dunque $f'(x_0) = 0$. Per un minimo si invertono le disuguaglianze. $\square$

Le ipotesi non si possono omettere: $|x|$ ha un minimo in 0 ma non e' derivabile; $f(x) = x$ su $[0, 1]$ ha estremi globali ai punti di frontiera senza che la derivata si annulli. Inoltre $f'(x_0) = 0$ non e' sufficiente per un estremo: x^3 ha derivata nulla in 0 ed e' strettamente crescente.

Teoremi di Rolle e Lagrange

Teorema – Teorema di Rolle (Teo. 21.4)

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e' continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e $f(a) = f(b)$, allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione

Per Weierstrass f assume massimo e minimo. Se coincidono, f e' costante e ogni punto interno va bene. Altrimenti almeno uno dei due estremi e' assunto in un punto interno, perche' i valori agli estremi dell'intervallo coincidono. In quel punto si applica Fermat. $\square$

La funzione $f(x) = |x|$ su $[-1, 1]$ mostra che la derivabilita' interna e' necessaria. La funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x$ per $x < 1$ e $f(1) = 0$ soddisfa $f(0) = f(1)$ ed e'

derivabile con derivata 1 su $(0, 1)$, ma non e' continua in 1: nessun punto interno annulla la derivata.

Teorema – Teorema di Lagrange (Teo. 21.5)

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e' continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) , allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione

Sottraiamo a f la retta secante e poniamo

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La funzione g e' continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e $g(a) = g(b)$. Rolle fornisce c con $g'(c) = 0$, che equivale alla formula. $\square$

Conseguenze del teorema di Lagrange

Teorema – Accrescimenti finiti (Teo. 21.6)

Sia f continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) . Se $|f'(x)| \leq M$ per ogni $x \in (a, b)$, allora

$$|f(y) - f(x)| \leq M |y - x| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Dimostrazione

Per $x < y$, Lagrange applicato a $[x, y]$ da' $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Prendendo i moduli si ottiene la stima. $\square$

Teorema – Criterio di costanza (Teo. 21.7)

Se f e' derivabile su un intervallo I e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora f e' costante su I .

Dimostrazione

Presi $x < y$ in I , la restrizione di f a $[x, y]$ verifica le ipotesi di Lagrange. Esiste $c \in (x, y)$ con $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$. Quindi tutti i valori di f coincidono. $\square$

Proposizione – Criteri di monotonia (Prop. 21.8)

Su un intervallo I :

$$f' \geq 0 \Rightarrow f \text{ crescente}, \quad f' \leq 0 \Rightarrow f \text{ decrescente}.$$

Se $f' > 0$ oppure $f' < 0$ in ogni punto, la monotonia e' stretta. E' sufficiente che il

segno stretto valga salvo punti isolati, purché la derivata non cambi segno su alcun sottointervallo.

Proposizione – Criterio del segno di f' (Prop. 21.9)

Se f' passa da positiva a negativa attraversando x_0 , allora x_0 è un massimo locale; se passa da negativa a positiva, è un minimo locale.

Teorema – Criterio di derivabilità (Teo. 21.10)

Sia f continua in x_0 , derivabile in un intorno bucato di x_0 e supponiamo che esista finito $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell$. Allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \ell$.

Per $x \neq x_0$, Lagrange applicato tra x e x_0 scrive il rapporto incrementale come $f'(c_x)$ con c_x compreso tra i due punti; quando $x \rightarrow x_0$, anche $c_x \rightarrow x_0$.

Esercizio Svolto

Per $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3(x^2 - 1)$. La derivata è positiva su $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e negativa su $(-1, 1)$. Quindi -1 è un massimo locale con valore 2, mentre 1 è un minimo locale con valore -2 .