

# Appunti di Analisi Matematica I

## Capitolo 20: La derivata

**Autore: Tommaso C.**

---

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

---

Argomenti: Rapporto incrementale · Retta tangente · Regole · Derivate laterali

## Indice

|   |                                                      |   |
|---|------------------------------------------------------|---|
| 1 | Introduzione al concetto di derivata                 | 1 |
| 2 | Definizione di derivata                              | 1 |
| 3 | Derivate delle funzioni elementari: parte I          | 2 |
| 4 | Regole di derivazione                                | 2 |
| 5 | Derivate delle funzioni elementari: parte II         | 2 |
| 6 | Derivata destra e sinistra, punti angolosi e cuspidi | 3 |
| 7 | Derivate di ordine superiore                         | 3 |

## Introduzione al concetto di derivata

La derivata misura una variazione istantanea. Se  $s(t)$  e' una posizione, il rapporto  $[s(t+h) - s(t)]/h$  e' la velocita' media nell'intervallo; il suo limite per  $h \rightarrow 0$  e' la velocita' istantanea. Geometricamente lo stesso limite e' il coefficiente angolare della tangente ottenuta come limite delle secanti.

Problemi classici di massimo e minimo e le leggi di riflessione e rifrazione della luce motivano la ricerca dei punti in cui una variazione infinitesima si annulla. La validita' di questa regola richiede pero' ipotesi precise, studiate nel capitolo successivo.

## Definizione di derivata

### Definizione – Derivata (Def. 20.1)

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $I$  intervallo, e sia  $x_0$  interno a  $I$ . La derivata di  $f$  in  $x_0$  e', quando esiste finita,

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

### Teorema – Derivabilita' implica continuita' (Teo. 20.2)

Se  $f$  e' derivabile in  $x_0$ , allora e' continua in  $x_0$ .

### Dimostrazione

Per  $x \neq x_0$ ,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0).$$

Il primo fattore tende a  $f'(x_0)$  e il secondo a zero, quindi la differenza tende a zero.

□

Il viceversa e' falso:  $f(x) = |x|$  e' continua in 0, ma i rapporti incrementali destro e sinistro valgono rispettivamente 1 e -1.

### Proposizione – Retta tangente (Prop. 20.3)

Se  $f$  e' derivabile in  $x_0$ , la tangente al grafico nel punto  $(x_0, f(x_0))$  ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

### Esercizio Svolto

Per  $f(x) = x^2$ ,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2x_0 + h \rightarrow 2x_0.$$

Dunque  $f'(x_0) = 2x_0$  e la tangente in  $x_0 = 1$  e'  $y = 2x - 1$ .

## Derivate delle funzioni elementari: parte I

Dalla definizione e dai limiti notevoli si ricavano

$$(c)' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (x^n)' = nx^{n-1},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (e^x)' = e^x.$$

Per la potenza intera si usa il binomio di Newton; per seno e coseno si usano  $\sin h/h \rightarrow 1$  e  $(\cos h - 1)/h \rightarrow 0$ .

## Regole di derivazione

### Teorema – Linearita', prodotto e quoziente (Teo. 20.4)

Se  $f$  e  $g$  sono derivabili in  $x_0$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , allora

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Se  $g(x_0) \neq 0$ , allora

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

### Teorema – Regola della catena (Teo. 20.5)

Siano  $f : A \rightarrow B$  derivabile in  $x_0$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile in  $f(x_0)$ . Allora  $g \circ f$  e' derivabile in  $x_0$  e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

### Teorema – Derivata dell'inversa (Teo. 20.6)

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua e strettamente monotona su un intervallo  $I$ . Se  $f$  e' derivabile in  $x_0 \in I$  e  $f'(x_0) \neq 0$ , allora l'inversa e' derivabile in  $y_0 = f(x_0)$  e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

## Derivate delle funzioni elementari: parte II

Le regole precedenti danno, nei rispettivi domini,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0),$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Per esempio  $\ln$  e' l'inversa di  $e^x$ , quindi la formula dell'inversa fornisce  $(\ln x)' = 1/x$ .

### Esercizio Svolto

Per  $f(x) = \ln(1 + x^2)$  la catena fornisce

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Per  $g(x) = xe^x$ , la regola del prodotto da'  $g'(x) = e^x(1 + x)$ .

## Derivata destra e sinistra, punti angolosi e cuspidi

### Definizione – Derivate laterali (Def. 20.7)

La derivata destra e la derivata sinistra sono

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La derivata finita esiste se e solo se entrambe esistono finite e coincidono.

Se le due derivate laterali sono finite ma diverse, il grafico ha un **punto angoloso**. Se sono infinite con segni opposti, si parla di **cuspidi**; se hanno lo stesso segno infinito, il grafico ha una **tangente verticale**.

Per  $f(x) = |x|$ ,  $f'_-(0) = -1$  e  $f'_+(0) = 1$ : l'origine e' un punto angoloso. Per  $f(x) = x^{2/3}$  le derivate laterali sono rispettivamente  $-\infty$  e  $+\infty$ : l'origine e' una cuspide.

## Derivate di ordine superiore

### Definizione – Derivate successive (Def. 20.8)

Se  $f'$  e' derivabile, si definisce  $f'' = (f')'$ . Ricorsivamente,

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

Una funzione e' di classe  $C^n$  su un intervallo se possiede derivate fino all'ordine  $n$  e  $f^{(n)}$  e' continua.

Per  $f(x) = e^x$  tutte le derivate coincidono con  $f$ ; per un polinomio di grado  $m$ , ogni derivata di ordine maggiore di  $m$  e' nulla.