

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 19: Serie numeriche non a termini positivi

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Serie alternate · Convergenza assoluta · Stime del resto · Prodotto di Cauchy

Indice

1	Serie numeriche alternanti	1
2	Serie a segno qualunque: convergenza assoluta	1
3	Esercizi svolti sulle serie	2
4	Complementi	2
4.1	Approssimazione del numero di Nepero	3
4.2	Prodotto alla Cauchy e funzione esponenziale	3

Serie numeriche alternanti

Definizione – Serie alternante (Def. 19.1)

Una serie alternante ha la forma

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n b_n \quad \text{oppure} \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n,$$

con $b_n \geq 0$.

Teorema – Criterio di Leibniz (Teo. 19.2)

Se $b_n \geq 0$, (b_n) e' decrescente definitivamente e $b_n \rightarrow 0$, allora $\sum (-1)^n b_n$ converge. Se S e' la somma e S_N la somma parziale,

$$|S - S_N| \leq b_{N+1}.$$

Il resto ha inoltre il segno del primo termine trascurato.

Dimostrazione

Le somme parziali pari formano una successione monotona e quelle dispari una successione monotona nel verso opposto; una famiglia resta sopra l'altra. Sono quindi convergenti. La differenza tra termini corrispondenti e' b_n e tende a zero, percio' i due limiti coincidono. La somma resta sempre tra due somme parziali consecutive, da cui segue la stima del resto. $\square$

Esercizio Svolto

La serie armonica alternata $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}/n$ converge per Leibniz. Per approssimarla con errore al piu' 10^{-3} basta scegliere $N \geq 999$, poiche' il modulo del resto e' al piu' $1/(N+1)$.

Serie a segno qualunque: convergenza assoluta

Definizione – Convergenza assoluta (Def. 19.3)

La serie $\sum a_n$ converge assolutamente se converge $\sum |a_n|$. Converte semplicemente o condizionatamente se converge, ma non assolutamente.

Teorema – Dall'assoluta alla semplice (Teo. 19.4)

Ogni serie assolutamente convergente e' convergente.

Dimostrazione

Per $m > n$, la disuguaglianza triangolare generalizzata da'

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k|.$$

Le code della serie dei moduli tendono a zero, quindi le somme parziali di $\sum a_n$ sono di Cauchy e convergono in $\mathbb{R}$. $\square$

Proposizione – Disuguaglianza triangolare per serie (Prop. 19.5)

Se $\sum a_n$ converge assolutamente, allora

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|.$$

La serie armonica alternata mostra che la convergenza semplice non implica quella assoluta. Per una serie a segno qualunque conviene quindi studiare prima la serie dei moduli con i criteri per termini positivi.

Esercizi svolti sulle serie

Esercizio Svolto

Consideriamo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Il termine $b_n = \ln n/n$ tende a zero ed è decrescente per $n > e$, quindi la serie converge per Leibniz. Non converge assolutamente: per $n \geq 3$, $\ln n/n \geq 1/n$, e la serie armonica diverge. La convergenza è condizionata.

Esercizio Svolto

La serie $\sum (-1)^n n/2^n$ converge assolutamente, perché il rapporto dei moduli tende a $1/2 < 1$.

Complementi

Approssimazione del numero di Nepero

Teorema – Serie esponenziale (Teo. 19.6)

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Per $N \geq 1$, il resto soddisfa

$$0 < R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{N! N}.$$

Infatti, per $k \geq 1$, $(N+k)! \geq N!(N+1)^k$, quindi il resto e' dominato da una serie geometrica. Per esempio $1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 = 65/24$ approssima e con errore minore di $1/(4! \cdot 4) = 1/96$.

Prodotto alla Cauchy e funzione esponenziale

Definizione – Prodotto di Cauchy (Def. 19.7)

Date $\sum a_n$ e $\sum b_n$, il loro prodotto di Cauchy e' la serie $\sum c_n$ con

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Teorema – Prodotto di Cauchy (Teo. 19.8)

Se entrambe le serie convergono assolutamente, allora anche il prodotto di Cauchy converge assolutamente e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

La stessa identita' vale se una serie converge assolutamente e l'altra converge.

Applicando il risultato alle serie di e^x e e^y si ottiene

$$e^x e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$