

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 18: Serie numeriche

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Somme parziali · Serie positive · Criteri · Applicazioni geometriche

Indice

1	Introduzione: il paradosso di Zenone	1
2	Definizione e prime proprietà	1
3	Proprietà associativa per le serie	2
4	Serie a termini positivi	2
5	Criteri di convergenza per serie positive	3
6	La serie armonica generalizzata	4
7	Criterio di condensazione di Cauchy	4
8	Ancora sul confronto asintotico	4
9	Come studiare il carattere di una serie	4
10	Curva e isola di Koch	5
11	Complementi: prodotto di Eulero	5
12	Esercizio conclusivo	5

Introduzione: il paradosso di Zenone

Percorrere prima meta' di un tratto, poi meta' del resto e cosi' via produce infiniti addendi ma una distanza finita:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1.$$

Una serie non e' una "somma infinita" eseguita tutta insieme: e' il limite della successione delle somme finite.

Definizione e prime proprieta'

Definizione – Serie e somme parziali (Def. 18.1)

Data una successione reale $(a_n)_{n \geq n_0}$, la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e' la successione

$$S_N = \sum_{n=n_0}^N a_n.$$

La serie converge a $S \in \mathbb{R}$ se $S_N \rightarrow S$, diverge a $\pm\infty$ se tale e' il limite delle somme parziali, ed e' indeterminata se (S_N) non ha limite neppure infinito.

Definizione – Resto (Def. 18.2)

Se la serie converge a S , il resto di ordine m e'

$$R_m = S - S_m = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n.$$

Modificare un numero finito di termini non cambia il carattere della serie, ma puo' cambiarne la somma.

Teorema – Condizione necessaria (Teo. 18.3)

Se $\sum a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$.

Dimostrazione

Poiche' $a_n = S_n - S_{n-1}$ e le due successioni a destra convergono allo stesso limite S , la loro differenza tende a zero. $\square$

Il viceversa e' falso: $1/n \rightarrow 0$, ma la serie armonica diverge. Raggruppando i termini da $2^k + 1$ a 2^{k+1} , ogni blocco ha somma almeno $1/2$, percio' le somme parziali non sono limitate.

Teorema – Serie geometrica (Teo. 18.4)

Per $q \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{se } |q| < 1.$$

Per $q \geq 1$ la serie diverge a $+\infty$; per $q \leq -1$ e' indeterminata.

Dimostrazione

Per $q \neq 1$,

$$S_N = 1 + q + \dots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Se $|q| < 1$, allora $q^{N+1} \rightarrow 0$. Negli altri casi il termine generale non tende a zero oppure le somme crescono senza limite. Per $q = 1$, $S_N = N + 1$. $\square$

Teorema – Serie di Mengoli (Teo. 18.5)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Dimostrazione

Poiche' $1/[n(n+1)] = 1/n - 1/(n+1)$, la somma parziale telescopica e' $S_N = 1 - 1/(N+1)$, che tende a 1. $\square$

Proprieta' associativa per le serie

Proposizione – Raggruppamento di una serie regolare (Prop. 18.6)

Raggruppando termini consecutivi di una serie convergente, oppure divergente a $+\infty$ o $-\infty$, si ottiene una serie con lo stesso carattere e la stessa somma quando questa e' finita.

Le somme parziali raggruppate formano una sottosuccessione di quelle originali. La proposizione non autorizza a permutare i termini e non permette di dedurre la convergenza della serie originale da un raggruppamento convergente.

Serie a termini positivi

Teorema – Regolarita' delle serie positive (Teo. 18.7)

Se $a_n \geq 0$ definitivamente, allora $\sum a_n$ e' regolare: converge a un numero reale oppure diverge a $+\infty$.

Dimostrazione

Da un certo indice in poi le somme parziali sono crescenti. Se sono limitate superiormente convergono al loro estremo superiore; se non lo sono, per ogni M superano definitivamente M e quindi tendono a $+\infty$. $\square$

Criteri di convergenza per serie positive

Teorema – Confronto (Teo. 18.8)

Se $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente, la convergenza di $\sum b_n$ implica quella di $\sum a_n$, mentre la divergenza di $\sum a_n$ implica quella di $\sum b_n$.

Teorema – Confronto asintotico (Teo. 18.9)

Se $a_n, b_n > 0$ definitivamente e $a_n/b_n \rightarrow \ell$ con $0 < \ell < +\infty$, allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.

Teorema – Criteri del rapporto e della radice (Teo. 18.10)

Per $a_n > 0$ definitivamente:

- se $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n < 1$, la serie converge;
- se $a_{n+1}/a_n \geq 1$ definitivamente, la serie diverge;
- se $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, la serie converge;
- se $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, la serie diverge.

Quando il limite pertinente vale 1, il criterio non decide.

Dimostrazione

Se $\limsup a_{n+1}/a_n < 1$, si possono scegliere $q < 1$ e N tali che $a_{n+1} \leq qa_n$ per $n \geq N$. Per induzione $a_{N+k} \leq a_N q^k$, quindi la coda è dominata da una serie geometrica. Se $a_{n+1}/a_n \geq 1$ definitivamente, i termini positivi non decrescono e dunque non tendono a zero.

Se $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, esistono $q < 1$ e N con $a_n \leq q^n$ per $n \geq N$, e il confronto geometrico prova la convergenza. Se invece $\liminf \sqrt[n]{a_n} > 1$, esiste $q > 1$ con $a_n \geq q^n$ definitivamente; il termine generale non tende a zero e la serie diverge. $\square$

La serie armonica generalizzata

Teorema – Serie armonica generalizzata (Teo. 18.11)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{converge se e solo se } \alpha > 1.$$

Per $\alpha \leq 0$ il termine non tende a zero. Per $\alpha > 0$ il risultato segue dal criterio di condensazione; la serie condensata è geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$.

Criterio di condensazione di Cauchy

Teorema – Condensazione di Cauchy (Teo. 18.12)

Se $(a_n)_{n \geq 1}$ è non negativa e decrescente, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$$

hanno lo stesso carattere.

Il confronto si ottiene dividendo gli indici nei blocchi $2^k \leq n < 2^{k+1}$, nei quali ogni termine è compreso tra i valori agli estremi del blocco.

Ancora sul confronto asintotico

Se $a_n \sim b_n$ con termini positivi, i due termini sono compresi, definitivamente, tra multipli positivi l'uno dell'altro. Questa osservazione riduce serie complicate a modelli noti. Per esempio

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n}} \sim \frac{1}{n},$$

quindi la serie corrispondente diverge.

Come studiare il carattere di una serie

Procedura Studio di una serie positiva

1. Controllare che il termine tenda a zero.
2. Riconoscere serie geometriche, telescopiche o armoniche generalizzate.
3. Cercare un equivalente semplice; altrimenti usare un confronto.
4. Usare rapporto o radice con fattoriali, esponenziali e potenze n -esime.
5. Usare la condensazione solo con termini decrescenti.

Curva e isola di Koch

Nella curva di Koch, a ogni passo ogni segmento è sostituito da quattro segmenti lunghi un terzo. La lunghezza al passo n è $L_n = L_0(4/3)^n$ e diverge. L'area aggiunta all'isola di Koch è invece descritta da una serie geometrica di ragione $4/9$, quindi resta finita. L'esempio separa nettamente finitezza dell'area e finitezza del perimetro.

Complementi: prodotto di Eulero

La fattorizzazione unica degli interi conduce formalmente, per $s > 1$, a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

La convergenza assoluta per $s > 1$ giustifica il passaggio al limite nei prodotti finiti. La formula collega serie e numeri primi.

Esercizio conclusivo

Esercizio Svolto

Studiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2/3^n$. Il rapporto tra termini consecutivi è

$$\frac{(n+1)^2/3^{n+1}}{n^2/3^n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{3} < 1.$$

Il criterio del rapporto garantisce la convergenza.