

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 15: Limiti notevoli e proprietà topologiche per successioni

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Limiti notevoli · Chiusura · Criteri sequenziali · Successioni di Cauchy

Indice

1	Limiti notevoli	1
2	Chiusura di un insieme e insiemi chiusi	1
3	Proprieta' topologiche per successioni	2
4	Successioni di Cauchy	2

Limiti notevoli

Teorema – Limiti trigonometrici (Teo. 15.1)

Valgono

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Il primo limite segue dal confronto geometrico $\cos x \leq \sin x/x \leq 1$ per x vicino a 0; il secondo segue da $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$.

Teorema – Limiti esponenziali e logaritmici (Teo. 15.2)

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e,$$

dove nell'ultimo limite $1+x > 0$. Inoltre, per $a > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Ne seguono le equivalenze asintotiche, per $x \rightarrow 0$,

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x.$$

Esse si possono sostituire nei prodotti e nei quozienti, non direttamente nelle differenze dove potrebbe avvenire cancellazione.

Esercizio Svolto

Calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin(2x)}.$$

Poichè $\ln(1+3x) \sim 3x$ e $\sin(2x) \sim 2x$, il limite vale $3/2$.

Chiusura di un insieme e insiemi chiusi

Definizione – Aderenza e chiusura (Def. 15.3)

Un punto $x \in \mathbb{R}$ è aderente ad $A \subseteq \mathbb{R}$ se ogni suo intorno interseca A . La chiusura $\overline{A}$ è l'insieme di tutti i punti aderenti ad A . L'insieme A è chiuso se $A = \overline{A}$.

Proposizione – Proprietà della chiusura (Prop. 15.4)

Per $A, B \subseteq \mathbb{R}$:

$$A \subseteq \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Inoltre $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene A .

Proprieta' topologiche per successioni

Teorema – Caratterizzazione sequenziale della chiusura (Teo. 15.5)

Per $x \in \mathbb{R}$ vale

$$x \in \overline{A} \iff \text{esiste una successione } (a_n) \subseteq A \text{ con } a_n \rightarrow x.$$

Di conseguenza A e' chiuso se e solo se contiene il limite di ogni successione convergente di suoi elementi.

Teorema – Caratterizzazione sequenziale del limite (Teo. 15.6)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, sia x_0 punto di accumulazione di A e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff [x_n \in A \setminus \{x_0\}, x_n \rightarrow x_0] \Rightarrow f(x_n) \rightarrow \ell.$$

Dimostrazione

Se il limite vale ℓ , ogni successione che entra definitivamente in ogni intorno bucato di x_0 ha immagini definitivamente in ogni intorno di ℓ . Viceversa, se la definizione di limite fallisce, esiste un intorno V di ℓ tale che per ogni n si puo' scegliere $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ con $|x_n - x_0| < 1/n$ ma $f(x_n) \notin V$. Allora $x_n \rightarrow x_0$ mentre $f(x_n) \not\rightarrow \ell$, assurdo. $\square$

Teorema – Caratterizzazione sequenziale della continuita' (Teo. 15.7)

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. La funzione f e' continua in x_0 se e solo se, per ogni successione $(x_n) \subseteq A$ con $x_n \rightarrow x_0$, si ha $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Dimostrazione

Se f e' continua, la tesi segue dal criterio sequenziale del limite; gli eventuali termini uguali a x_0 hanno gia' immagine $f(x_0)$. Se f non e' continua, esiste $\varepsilon_0 > 0$ e, per ogni n , un punto $x_n \in A$ con $|x_n - x_0| < 1/n$ ma $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Questa successione converge a x_0 , ma le immagini non convergono a $f(x_0)$. $\square$

Il criterio e' particolarmente utile in forma negativa: per provare che f non e' continua in x_0 basta trovare una successione $x_n \rightarrow x_0$ per cui $f(x_n)$ non tende a $f(x_0)$.

Successioni di Cauchy

Definizione – Successione di Cauchy (Def. 15.8)

Una successione reale (a_n) e' di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : m, n \geq N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Proposizione – Limitatezza (Prop. 15.9)

Ogni successione di Cauchy è limitata.

Teorema – Completezza sequenziale di $\mathbb{R}$ (Teo. 15.10)

Una successione reale converge in $\mathbb{R}$ se e solo se è di Cauchy.

Se $a_n \rightarrow \ell$, la disuguaglianza triangolare rende (a_n) di Cauchy. Viceversa una successione di Cauchy è limitata. Ogni successione reale ammette una sottosuccessione monotona; in questo caso essa è anche limitata e quindi converge a un certo ℓ . La condizione di Cauchy obbliga allora tutta la successione a convergere a ℓ .

Esercizio Svolto

Per $a_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k}$ e $m > n$,

$$|a_m - a_n| = \sum_{k=n+1}^m 2^{-k} < 2^{-n}.$$

Dato $\varepsilon > 0$, scegliendo N con $2^{-N} < \varepsilon$ si prova che (a_n) è di Cauchy; inoltre $a_n = 1 - 2^{-n} \rightarrow 1$.