

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 13: Limiti di funzioni monotone e confronto locale

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Limiti monotoni · Numero di Nepero · Asintotici · Gerarchie · Criterio del rapporto

Indice

1	Limiti di funzioni monotone	1
2	Limiti di successioni monotone e numero di Nepero	1
3	Confronto locale tra funzioni	2
4	Complementi	4
4.1	Un teorema di Cesaro e applicazioni allo studio di successioni	4
4.2	Ancora sul numero di Nepero	4

Limiti di funzioni monotone

Teorema – Limiti unilaterali delle monotone (Teo. 13.1)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ monotona e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Se x_0 e' punto di accumulazione a sinistra e f e' crescente, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A, x < x_0\}.$$

Se f e' decrescente, il sup e' sostituito dall'inf.

- Se x_0 e' punto di accumulazione a destra e f e' crescente, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A, x > x_0\}.$$

Se f e' decrescente, l'inf e' sostituito dal sup.

I valori sono intesi in $\overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione

Consideriamo il limite sinistro di una funzione crescente e poniamo

$$\ell = \sup\{f(x) : x \in A, x < x_0\}.$$

Sia dapprima $\ell \in \mathbb{R}$. Dato $\varepsilon > 0$, per la caratterizzazione del sup esiste $a \in A$, $a < x_0$, tale che $f(a) > \ell - \varepsilon$. Se $a < x < x_0$ e $x \in A$, la monotonia implica

$$\ell - \varepsilon < f(a) \leq f(x) \leq \ell,$$

quindi $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Se $\ell = +\infty$, dato $M > 0$ esiste invece $a < x_0$ con $f(a) > M$, e per $a < x < x_0$ vale $f(x) > M$. Gli altri casi si ottengono scambiando destra e sinistra, sup e inf, crescente e decrescente. $\square$

In un punto interno al dominio i limiti unilaterali di una monotona sono finiti. Per una crescente vale

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+),$$

quando i tre valori sono definiti. La differenza $f(x_0^+) - f(x_0^-)$ e' il salto in x_0 .

Limiti di successioni monotone e numero di Nepero

Proposizione – Successioni monotone (Prop. 13.2)

Ogni successione monotona e' regolare in $\overline{\mathbb{R}}$. Precisamente,

$$(a_n) \text{ crescente} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n,$$

$$(a_n) \text{ decrescente} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

In particolare una successione monotona converge in $\mathbb{R}$ se e solo se e' limitata nel verso della monotonia.

Proposizione – Successione di Nepero (Prop. 13.3)

La successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1,$$

e' strettamente crescente e limitata superiormente; inoltre

$$2 < a_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 3 \quad (n \geq 2).$$

Dimostrazione

Dal binomio di Newton,

$$a_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Passando da n a $n+1$, ogni fattore aumenta e compare un termine positivo: quindi $a_{n+1} > a_n$. Eliminando i fattori, tutti minori di 1, si ottiene $a_n \leq \sum_{k=0}^n 1/k!$. Infine, per $k \geq 2$, $k! \geq 2^{k-1}$, percio'

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} < 3.$$

□

Definizione – Numero di Nepero (Def. 13.4)

Si definisce

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

In particolare $2 < e \leq 3$.

Confronto locale tra funzioni

Definizione – Trascurabile, stesso ordine, asintotico (Def. 13.5)

Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per A . Per $x \rightarrow x_0$:

- $f = o(g)$ se definitivamente $f = \sigma g$ con $\sigma(x) \rightarrow 0$;
- f e g sono dello stesso ordine se definitivamente $f = \sigma g$ con $\sigma(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $f \sim g$ se definitivamente $f = \sigma g$ con $\sigma(x) \rightarrow 1$.

La relazione $\sim$ e la relazione di stesso ordine sono riflessive, simmetriche e transitive. La relazione o e' transitiva ma non simmetrica. Inoltre $f \sim g$ implica che f e g hanno lo stesso ordine.

Proposizione – Criterio del quoziente (Prop. 13.6)

Supponiamo $g(x) \neq 0$ definitivamente. Allora

$$f = o(g) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, \quad f \sim g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1.$$

Piu' in generale, f e g hanno lo stesso ordine se e solo se $f(x)/g(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definizione – Infinitesimi e infiniti (Def. 13.7)

f e' infinitesima per $x \rightarrow x_0$ se $f(x) \rightarrow 0$; e' un infinito se $|f(x)| \rightarrow +\infty$.

Definizione – Ordine di infinitesimi e infiniti (Def. 13.8)

Se $f = o(g)$ e entrambe sono infinitesime, f e' un infinitesimo di ordine superiore a g . Se $f = o(g)$ e entrambe sono infinite, f e' un infinito di ordine inferiore a g .

Esempi fondamentali:

$$\sin x \sim x \quad (x \rightarrow 0), \quad |x|^\alpha = o(|x|^\beta) \quad (x \rightarrow 0, \alpha > \beta > 0),$$

mentre all'infinito l'ordine delle potenze si inverte.

Proposizione – Gerarchia di infiniti e infinitesimi (Prop. 13.9)

Per $a > 1$ e $\alpha > 0$:

$$\frac{a^x}{x^\alpha} \rightarrow +\infty, \quad \frac{\log_a x}{x^\alpha} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$|x|^\alpha a^x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty), \quad x^\alpha \log_a x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0^+),$$

e $x^x/a^x \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. In forma sintetica,

$$\log_a x = o(x^\alpha), \quad x^\alpha = o(a^x), \quad a^x = o(x^x).$$

Proposizione – Criterio del rapporto per successioni (Prop. 13.10)

Sia $a_n > 0$ e supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty].$$

Se $L < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$; se $L > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$. Per $L = 1$ il criterio non conclude.

Dimostrazione

Se $L < 1$, scegliamo q con $L < q < 1$. Definitivamente $a_{n+1} \leq qa_n$; iterando, $a_n \leq Cq^n \rightarrow 0$. Se $L > 1$, scegliamo $1 < q < L$: definitivamente $a_{n+1} \geq qa_n$, quindi $a_n \geq Cq^n \rightarrow +\infty$. $\square$

Esercizio Svolto

Confrontare $n!$ e 2^n . Posto $b_n = n!/2^n$,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{2} \rightarrow +\infty > 1.$$

Il criterio del rapporto da' $b_n \rightarrow +\infty$, cioè $2^n = o(n!)$ per $n \rightarrow +\infty$.

Complementi

Un teorema di Cesaro e applicazioni allo studio di successioni

Teorema – Cesaro per le radici n -esime (Teo. 13.11)

Sia $a_n > 0$. Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, +\infty],$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Il viceversa non vale in generale.

Il risultato consente, per esempio, di ottenere

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \quad (\alpha > 0), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4.$$

Ancora sul numero di Nepero

Proposizione – Espressione di e mediante fattoriali (Prop. 13.12)

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

L'uguaglianza si ottiene confrontando le somme con lo sviluppo binomiale di $(1+1/n)^n$: per ogni ordine fissato i fattori dello sviluppo tendono a 1, mentre le stime geometriche forniscono il controllo uniforme della coda.