

Appunti di Analisi Matematica I

Capitolo 10: Funzioni elementari

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal materiale del corso e dai testi di riferimento

Argomenti: Potenze · Radici · Esponenziali · Logaritmi · Funzioni iperboliche e
trigonometriche

Indice

1	Funzioni affini	1
2	La funzione potenza n -esima e radice n -esima	1
3	La funzione potenza con esponente intero negativo	1
4	Funzione esponenziale e logaritmo	1
5	La funzione potenza di esponente reale	3
6	Le funzioni iperboliche e le loro inverse	3
7	Le funzioni trigonometriche e le loro inverse	4
8	Complementi: teoremi sulla funzione esponenziale	4

Funzioni affini

Una funzione affine ha forma $f(x) = ax + b$. Se $a > 0$ e' strettamente crescente, se $a < 0$ e' strettamente decrescente e se $a = 0$ e' costante. Per $a \neq 0$ e' biettiva su $\mathbb{R}$ e

$$f^{-1}(y) = \frac{y - b}{a}.$$

La funzione potenza n -esima e radice n -esima

Definizione – Potenza naturale (Def. 10.1)

Per $n \in \mathbb{N}$ si definisce $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $p_n(x) = x^n$. Per $n = 0$ si assume la funzione costante $p_0(x) = 1$.

Proposizione – Simmetria, monotonia e immagine (Prop. 10.2)

Sia $n \geq 1$.

- Se n e' pari, p_n e' pari, decrescente su $(-\infty, 0]$ e crescente su $[0, +\infty)$; la sua immagine e' $[0, +\infty)$.
- Se n e' dispari, p_n e' dispari, strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e ha immagine $\mathbb{R}$.

Definizione – Radice n -esima (Def. 10.3)

Se n e' pari, $\sqrt[n]{\cdot}$ e' l'inversa di $p_n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Se n e' dispari, e' l'inversa di $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. In entrambi i casi e' strettamente crescente.

Proposizione – Regole delle radici (Prop. 10.4)

Per $a, b > 0$ e $m, n \geq 1$:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

La funzione potenza con esponente intero negativo

Per $n \geq 1$,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione e' pari se n e' pari e dispari se n e' dispari. E' sempre strettamente decrescente su $(0, +\infty)$; sul semiasse negativo il verso dipende dalla parita' di n .

Funzione esponenziale e logaritmo

Per $a > 0$ e $q = m/n \in \mathbb{Q}$, $n \geq 1$, si pone

$$a^q = \sqrt[n]{a^m}.$$

La definizione non dipende dalla rappresentazione di q e conserva le regole delle potenze.

Proposizione – Potenze razionali (Prop. 10.5)

Per $a, b > 0$ e $p, q \in \mathbb{Q}$:

$$(ab)^q = a^q b^q, \quad a^{p+q} = a^p a^q, \quad (a^p)^q = a^{pq}.$$

Inoltre $q \mapsto a^q$ e' crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Teorema – Separazione per esponenti reali (Teo. 10.6)

Siano $a > 0$, $a \neq 1$, e $x \in \mathbb{R}$. Gli insiemi dei valori a^q con $q \in \mathbb{Q}$, $q < x$, e con $q > x$ sono non vuoti, separati e contigui. Se $a > 1$ il primo precede il secondo; se $0 < a < 1$ l'ordine si inverte.

Definizione – Esponenziale reale (Def. 10.7)

Il numero a^x e' l'unico separatore dei due insiemi del teorema precedente. La funzione

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), \quad \exp_a(x) = a^x,$$

si chiama esponenziale di base a .

Teorema – Proprieta' fondamentali dell'esponenziale (Teo. 10.8)

Per $a > 0$, $a \neq 1$:

- i. $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^0 = 1$ e $a^{-x} = 1/a^x$;
- ii. $\exp_a$ e' strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $0 < a < 1$;
- iii. $\exp_a$ e' biettiva da $\mathbb{R}$ a $(0, +\infty)$.

Definizione – Logaritmo (Def. 10.9)

Per $a > 0$, $a \neq 1$, il logaritmo di base a e' l'inversa

$$\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

dell'esponenziale. Pertanto $\log_a(a^x) = x$ e $a^{\log_a y} = y$.

Per $x, y > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e basi $a, b > 0$, $a, b \neq 1$:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a(x^\lambda) = \lambda \log_a x, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

La base naturale e' il numero di Nepero e ; si scrivono $\exp x = e^x$ e $\log x = \log_e x$.

La funzione potenza di esponente reale

Definizione – Potenza reale (Def. 10.10)

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$ si definisce

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log x).$$

Se $\alpha > 0$ si prolunga ponendo $0^\alpha = 0$.

Proposizione – Monotonia e inversa (Prop. 10.11)

La funzione $p_\alpha(x) = x^\alpha$ è strettamente crescente per $\alpha > 0$ e strettamente decrescente per $\alpha < 0$. Per $\alpha \neq 0$ è biettiva sul proprio dominio naturale e la sua inversa è $p_{1/\alpha}$.

Esercizio Svolto

Risolvere $3^{2x-1} = 7$. Applicando $\log_3$ a entrambi i membri:

$$2x - 1 = \log_3 7, \quad x = \frac{1 + \log_3 7}{2}.$$

L'unicità segue dalla stretta crescita di $x \mapsto 3^{2x-1}$.

Le funzioni iperboliche e le loro inverse

Definizione – Funzioni iperboliche (Def. 10.12)

Per $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Proposizione – Proprietà iperboliche (Prop. 10.13)

$\cosh$ è pari, mentre $\sinh$ e $\tanh$ sono dispari. Inoltre

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$\sinh$ e $\tanh$ sono strettamente crescenti su $\mathbb{R}$, $\cosh$ è crescente su $[0, +\infty)$, e

$$\cosh(\mathbb{R}) = [1, +\infty), \quad \sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad \tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1).$$

Definizione – Inverse iperboliche (Def. 10.14)

Le inverse delle opportune restrizioni sono

$$\operatorname{arccosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad x \geq 1,$$

$$\operatorname{arcsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1.$$

Le funzioni trigonometriche e le loro inverse

Sulla circonferenza unitaria, $\cos x$ e $\sin x$ sono rispettivamente ascissa e ordinata del punto individuato dall'arco orientato x . La tangente è definita da

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Le prime due funzioni hanno periodo 2π e immagine $[-1, 1]$; la tangente ha periodo π e immagine $\mathbb{R}$. Seno e tangente sono dispari, il coseno è pari.

Le restrizioni biettive definiscono

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2], \quad \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad \arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2).$$

Complementi: teoremi sulla funzione esponenziale

La costruzione dell'esponenziale reale usa due ingredienti: la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ e la completezza di $\mathbb{R}$. La monotonia delle potenze razionali separa i valori con esponente minore e maggiore di x ; la contiguità rende unico il valore a^x . Per approssimare numericamente a^x si scelgono successioni razionali $q_n \uparrow x$ e $r_n \downarrow x$: i valori a^{q_n} e a^{r_n} stringono a^x dai due lati quando $a > 1$.

La legge $a^{x+y} = a^x a^y$ si ottiene prima per esponenti razionali e poi si estende ai separatori. Essa mostra che $\exp_a$ trasforma somme in prodotti; la biettività permette infine di definire il logaritmo e trasferire la legge dei prodotti nella legge delle somme.