

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 8: Sottospazi Vettoriali

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Indice

1	Sottospazi vettoriali	1
1.1	Esempi fondamentali	1
1.2	Esempi su matrici e polinomi	2
1.3	Esempi in $\mathbb{R}^2$: criterio pratico	3
1.4	Sottospazi notevoli di $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$	3
2	Il teorema sulle soluzioni di un sistema omogeneo	3
3	Spazio generato e sistemi di generatori	4
3.1	Sistemi di generatori canonici	4
3.2	Tre teoremi fondamentali	5
3.3	Proprietà di invarianza per insiemi indipendenti e dipendenti	5
3.4	Esercizio: sistema di generatori da un sistema lineare	6
3.5	Esercizio: sistema di generatori per matrici simmetriche 2×2	6
4	Basi di uno spazio vettoriale	7
4.1	Basi canoniche	7
4.2	Verifica che un insieme è una base	7
4.3	Algoritmo degli scarti successivi (crivello)	8
4.4	Sottospazio di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$: esercizio completo	9
5	Teorema di rappresentazione unica e coordinate	10
6	Dimensione di uno spazio vettoriale	11

1 Sottospazi vettoriali

Gli spazi vettoriali sono strutture spesso molto grandi: invece di studiarli per intero, la strategia naturale è ridursi a sottoinsiemi particolari che ne conservino la struttura. Allo stesso modo in cui in geometria piana si studiano triangoli e quadrati invece del piano infinito, qui ci si concentra sui *sottospazi vettoriali*.

Definizione – Sottospazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale e sia $W \subseteq V$ un sottoinsieme non vuoto di V . Diciamo che W è un **sottospazio vettoriale** di V se valgono le seguenti proprietà:

1. **Chiusura rispetto alla somma:** per ogni $w_1, w_2 \in W$, si ha $w_1 + w_2 \in W$;
2. **Chiusura rispetto alla moltiplicazione per scalare:** per ogni $w \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha $\lambda w \in W$.

In altri termini, W è *stabile* (o *chiuso*) rispetto alle due operazioni di spazio vettoriale di V .

Proposizione – Il vettore nullo appartiene a ogni sottospazio

Sia V uno spazio vettoriale e sia $W \subseteq V$ un suo sottospazio vettoriale. Allora necessariamente $\mathbf{0}_V \in W$.

Dimostrazione

Poiché W è non vuoto per definizione, esiste $w \in W$. Per la proprietà 2 della Definizione 1, il prodotto $0 \cdot w = \mathbf{0}_V$ appartiene a W . $\square$

Nota – Condizione necessaria di sotto-spazialità

Il fatto che $\mathbf{0}_V \in W$ è una **condizione necessaria** affinché W sia un sottospazio vettoriale. Se il vettore nullo non appartiene a W , si può immediatamente concludere che W non è un sottospazio, *senza* dover verificare le altre condizioni. Questo fornisce un criterio rapido per escludere candidati.

1.1 Esempi fondamentali

Definizione – Sottospazi banali

Sia V uno spazio vettoriale. I due sottospazi

$$W = \{\mathbf{0}_V\} \quad \text{e} \quad W = V$$

sono detti **sottospazi banali** di V : rispettivamente il più piccolo e il più grande sottospazio possibile.

Nota

La retta vettoriale generata da un vettore non nullo $v \in V$ è il sottospazio

$$W = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

cioè l'insieme di tutti i multipli di v . Geometricamente corrisponde alla retta passante per l'origine e parallela a v . Si verifica che la somma di due multipli di v è ancora un multiplo di v , e che qualsiasi multiplo di un multiplo di v è ancora un multiplo di v .

Analogamente, lo spazio generato da due vettori linearmente indipendenti v e w

$$W = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

è detto **piano vettoriale**.

1.2 Esempi su matrici e polinomi

Esempio 1. Sia W l'insieme delle matrici 2×2 della forma $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Si verifica che W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$:

- *Chiusura rispetto alla somma:* siano $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ in W . La loro somma è $\begin{pmatrix} a + \alpha & a + \alpha \\ 0 & b + \beta \end{pmatrix}$, che ha ancora la stessa forma, quindi appartiene a W .
- *Chiusura rispetto agli scalari:* $\lambda \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda a \\ 0 & \lambda b \end{pmatrix}$, anch'essa della forma richiesta.

Esempio 2. L'insieme delle matrici della forma $\begin{pmatrix} a & b+1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$: la matrice nulla richiederebbe $a = 0$ e $b = 0$, ma allora l'entrata in posizione $(1, 2)$ sarebbe $0 + 1 = 1 \neq 0$. Poiché la matrice nulla non appartiene all'insieme, questo non è un sottospazio.

Esempio 3: insiemi di polinomi.

- L'insieme $\mathbb{R}_{\leq n}[x] = \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ dei polinomi di grado al più n è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$: il polinomio nullo appartiene (con tutti i coefficienti nulli), la somma di due polinomi di grado al più n ha ancora grado al più n , e lo stesso vale per il prodotto per uno scalare.
- L'insieme dei polinomi di grado esattamente n non è un sottospazio: non contiene il polinomio nullo (che non ha grado definito), e la somma $x^2 + x + (-x^2 + x) = 2x$ ha grado $1 \neq n$.

1.3 Esempi in $\mathbb{R}^2$: criterio pratico

Nota – Criterio per riconoscere i sottospazi di $\mathbb{R}^n$

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale se e solo se è descritto da **equazioni lineari omogenee di primo grado**. Sono segnali di non-sottospazialità: termini di grado superiore a 1, valori assoluti, funzioni trigonometriche, disequazioni, o termini noti non nulli. Questa osservazione è il contenuto del teorema seguente.

Di seguito alcuni insiemi di $\mathbb{R}^2$ e la loro classificazione:

- $A = \{(x, y) : |x| + |y| = 0\}$ è il solo vettore nullo: è un sottospazio (banale).
- $B = \{(x, y) : |x| + y = 0\}$, ovvero $y = -|x|$, non è un sottospazio: $(1, -1)$ e $(-1, -1)$ appartengono entrambi, ma la loro somma $(0, -2)$ non appartiene.
- $C = \{(x, y) : xy \geq 0\}$ (primo e terzo quadrante) non è un sottospazio: $(1, 3)$ e $(-2, -1)$ appartengono, ma $(-1, 2) = (1, 3) + (-2, -1)$ non appartiene.
- $D = \{(x, y) : x + y > 0\}$ non è un sottospazio: non contiene il vettore nullo.
- $E = \{(x, y) : x + y = 0\}$ è un sottospazio: è la retta $y = -x$, descritta da un'equazione lineare omogenea.

1.4 Sottospazi notevoli di $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

I seguenti insiemi, già studiati in precedenza, sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: le matrici simmetriche, le matrici antisimmetriche, le matrici triangolari superiori, le matrici triangolari inferiori e le matrici diagonali.

2 Il teorema sulle soluzioni di un sistema omogeneo

Teorema – Soluzioni di un sistema omogeneo

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e sia $AX = \mathbf{0}$ il sistema lineare omogeneo associato. L'insieme

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = \mathbf{0}\}$$

delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se il sistema è omogeneo.

Dimostrazione

Mostriamo direttamente che S è un sottospazio (il sistema è omogeneo per costruzione).

Chiusura rispetto alla somma. Siano $\alpha, \beta \in S$, ovvero $A\alpha = \mathbf{0}$ e $A\beta = \mathbf{0}$. Allora

$$A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

quindi $\alpha + \beta \in S$.

Chiusura rispetto agli scalari. Sia $\alpha \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$A(\lambda\alpha) = \lambda(A\alpha) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

quindi $\lambda\alpha \in S$.

Viceversa, se S è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, allora contiene il vettore nullo $\mathbf{0} \in S$, quindi $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, da cui $b = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e il sistema è omogeneo. $\square$

Questo teorema giustifica il criterio pratico visto sopra: i sottospazi di $\mathbb{R}^n$ sono esattamente le soluzioni di sistemi lineari omogenei.

3 Spazio generato e sistemi di generatori

Definizione – Spazio generato e sistema di generatori

Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ vettori di uno spazio vettoriale. L'insieme di tutte le loro combinazioni lineari

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

è detto **sottospazio generato** dai vettori $v_1, \dots, v_n$. I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono **generatori** (o sistema di generatori) di $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$.

Se $W = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$, diciamo che W è **finitamente generato**. Lo spazio generato da un singolo vettore non nullo si chiama **retta vettoriale**; quello generato da due vettori linearmente indipendenti si chiama **piano vettoriale**.

Proposizione – Lo spazio generato è un sottospazio

Siano $v_1, \dots, v_n \in V$. Allora $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$ è un sottospazio vettoriale di V .

Dimostrazione

Siano $w_1 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ e $w_2 = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$ elementi di $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$. Allora

$$w_1 + w_2 = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)v_n \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n).$$

Similmente, per $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha $\alpha w_1 = (\alpha\lambda_1)v_1 + \dots + (\alpha\lambda_n)v_n \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$. $\square$

3.1 Sistemi di generatori canonici

Per $\mathbb{R}^n$. I vettori canonici $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ formano un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$: ogni vettore $(x_1, \dots, x_n)$ si scrive come $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Per $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Le matrici E_{ij} con un solo 1 in posizione (i, j) e 0 altrove formano un sistema di generatori: ogni matrice si ottiene come combinazione lineare di tali matrici con i propri elementi come coefficienti.

Per $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$. I monomi $1, x, x^2, \dots, x^n$ formano un sistema di generatori: ogni polinomio $a_n x^n + \dots + a_0$ è una loro combinazione lineare.

3.2 Tre teoremi fondamentali

I teoremi seguenti descrivono quando un generatore può essere aggiunto o rimosso da un sistema senza alterare lo spazio generato.

Proposizione – Aggiunta di una combinazione lineare

Siano V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n \in V$. Se $w \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$, allora

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n, w) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n).$$

In altre parole, aggiungere a un sistema di generatori un vettore che è già combinazione lineare degli altri non cambia lo spazio generato. Letto nella direzione opposta: *da un sistema di generatori si può eliminare qualsiasi generatore che sia combinazione lineare dei rimanenti*, senza alterare lo spazio generato. Questa è la lettura più importante in vista della costruzione di basi.

Proposizione – Rimozione di più vettori dipendenti

Siano V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \in V$. Se $w_1, \dots, w_m \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$, allora

$$\mathcal{L}(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n).$$

Proposizione – Completamento di un insieme indipendente

Siano V uno spazio vettoriale e $v_1, \dots, v_n \in V$ linearmente indipendenti. Se $w \notin \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$, allora i vettori $v_1, \dots, v_n, w$ sono ancora linearmente indipendenti.

Dimostrazione

Sia $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \mu w = \mathbf{0}_V$. Poiché w non è combinazione lineare dei v_i , deve essere $\mu = 0$. Si ottiene allora $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}_V$, e poiché i v_i sono linearmente indipendenti, anche tutti i $\lambda_i = 0$. $\square$

3.3 Proprietà di invarianza per insiemi indipendenti e dipendenti

Proposizione – Invarianza dell'indipendenza lineare

Sia V uno spazio vettoriale.

1. Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti, togliendo qualcuno dei v_i si ottengono vettori ancora linearmente indipendenti.
2. Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti, aggiungendo altri vettori si ottiene un insieme ancora linearmente dipendente.

La seconda proprietà è riassunta efficacemente dalla metafora del professore: «*se aggiungo una mela a delle mele marce, marcisce pure l'ultima*». Conseguenza pratica: per ottenere vettori indipendenti da un insieme dipendente, occorre *eliminare* i vettori ridondanti, non aggiungerne altri.

3.4 Esercizio: sistema di generatori da un sistema lineare

Esercizio Svolto 1

Trovare un sistema di generatori per il sottospazio

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_2 - x_4, \quad x_1 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Soluzione. Il sottospazio W è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo (Teorema 2), quindi è effettivamente un sottospazio.

Le equazioni si riscrivono come

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Scegliendo x_2 e x_4 come parametri liberi, si ottiene $x_1 = -x_4$ e $x_3 = -x_1 - x_4 = x_4 - x_4 = 0$. Aspettando la trascrizione corretta (il sistema della lezione aveva equazioni leggermente diverse), la soluzione generale fornita a lezione è:

$$x_1 = -2x_2 + x_4, \quad x_3 = 2x_2 - 2x_4,$$

con x_2, x_4 parametri liberi. Quindi

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2(-2, 1, 2, 0) + x_4(1, 0, -2, 1),$$

da cui $W = \mathcal{L}((-2, 1, 2, 0), (1, 0, -2, 1))$.

3.5 Esercizio: sistema di generatori per matrici simmetriche 2×2

Esercizio Svolto 2

Trovare un sistema di generatori per l'insieme $\text{Sym}_2(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche 2×2 .

Soluzione. La forma generale di una matrice simmetrica 2×2 è

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Separando i parametri a, b, c si ottiene direttamente la combinazione lineare. Quindi

$$\text{Sym}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Il metodo generale per trovare sistemi di generatori è sempre questo: si scrive la forma generale dell'elemento tipico di W , si separano i parametri, si estraggono i vettori che li moltiplicano.

4 Basi di uno spazio vettoriale

Definizione – Base di uno spazio vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Un insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ è una **base** di V se e solo se valgono simultaneamente:

1. i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono **generatori**: $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n)$;
2. i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono **linearmente indipendenti**.

Entrambe le condizioni sono indispensabili: un sistema di generatori dipendenti non è una base, e un insieme di vettori indipendenti che non generano tutto lo spazio nemmeno.

4.1 Basi canoniche

Nota – Basi canoniche degli spazi principali

I seguenti insiemi sono le **basi canoniche** dei rispettivi spazi:

- In $\mathbb{R}^n$: i vettori $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.
- In $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$: le matrici E_{ij} con 1 in posizione (i, j) e 0 altrove.
- In $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$: i monomi $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

Queste basi non sono le uniche basi possibili: ogni spazio finitamente generato ammette infinite basi distinte.

4.2 Verifica che un insieme è una base

Esercizio Svolto 3

Stabilire se $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (2, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$.

Soluzione. Si forma la matrice A con i vettori in colonna e si calcola il determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 3 \neq 0.$$

Poiché $\det(A) \neq 0$, per il teorema di Cramer il sistema $\lambda v_1 + \mu v_2 = \mathbf{0}$ ammette solo la soluzione nulla: i vettori sono **linearmente indipendenti**. Inoltre, il sistema $\lambda v_1 + \mu v_2 = (a, b)$ ammette soluzione per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (ancora per Cramer), quindi i vettori sono **generatori**. In conclusione, $\{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

Nota – Criterio con il determinante

Dati n vettori di $\mathbb{R}^n$, la matrice A con i vettori in colonna soddisfa:

$$\begin{aligned} \det(A) \neq 0 &\iff \text{i vettori sono linearmente indipendenti} \\ &\iff \text{i vettori formano una base di } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Questa equivalenza segue direttamente dal teorema di Cramer.

4.3 Algoritmo degli scarti successivi (crivello)

Teorema – Esistenza della base

Ogni spazio vettoriale $V \neq \{0\}$ finitamente generato ammette almeno una base.

La dimostrazione è costruttiva e si basa sull'algoritmo seguente.

Nota – Algoritmo degli scarti successivi

Dato un sistema di generatori $v_1, v_2, \dots, v_m$ di V , si procede così:

1. Si scansionano i vettori nell'ordine.
2. Se $v_i = 0$, si **scarta**.
3. Se $v_i \in \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})$ (cioè è combinazione lineare dei vettori già salvati), si **scarta**: per la Proposizione 3.2 lo spazio generato non cambia.
4. Altrimenti si **salva**.

I vettori salvati alla fine sono generatori e linearmente indipendenti, cioè una base. Il professore descrive il procedimento come un «crivello di Eratostene degli spazi vettoriali»: si setaccia finché nel setaccio rimane solo ciò che è irriducibile.

Esercizio Svolto 4

Estrarre una base da $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \subset \mathbb{R}^5$, dove

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0, -1, 2), & v_2 &= (2, 1, 1, 0, -1), & v_3 &= (0, 0, 0, 0, 0), \\ v_4 &= (-2, -2, 0, 2, -4), & v_5 &= (3, 4, 3, 1, -2). \end{aligned}$$

Soluzione.

- $v_1 \neq 0$: **si salva**.
- v_2 non è proporzionale a v_1 : **si salva**.
- $v_3 = 0$: **si scarta**.
- $v_4 = -2v_1$, combinazione lineare di v_1 : **si scarta**.
- v_5 non è combinazione lineare di v_1 e v_2 (si verifica): **si salva**.

Una base è $\{v_1, v_2, v_5\}$. Si noti che la base estratta dipende dall'ordinamento scelto: partendo dall'ultimo vettore si otterrebbe una base diversa, ma ugualmente valida.

Esercizio Svolto 5

Estrarre una base da $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\} \subset \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$, dove

$$p_1 = -x + 1, \quad p_2 = 2x^3 - x + 1, \quad p_3 = x^3 - x^2 + 1,$$

$$p_4 = 2x^3 + x^2 - 2x + 3, \quad p_5 = x + 1.$$

Soluzione.

- $p_1 \neq 0$: **si salva.**
- p_2 ha grado 3 mentre p_1 ha grado 1: non è proporzionale a p_1 . **Si salva.**
- p_3 non è combinazione lineare di p_1 e p_2 (si verifica con un sistema): **si salva.**
- $p_4 = 2p_2 + p_3$: **si scarta.**
- $p_5 = x + 1$: il termine x non si può ottenere dai precedenti senza introdurre contributi in x^3 indesiderati. **Si salva.**

Una base è $\{p_1, p_2, p_3, p_5\}$.

Trucco del professore. Quando si lavora con polinomi, «giocarsi il grado»: se un certo monomio di grado alto compare solo in alcuni elementi della lista già salvata, il suo coefficiente nella rappresentazione è univocamente determinato, riducendo il sistema da risolvere.

4.4 Sottospazio di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$: esercizio completo

Esercizio Svolto 6

Sia

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \alpha + \beta - 2\gamma = 0, \quad \beta + 2\delta = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \right\}.$$

Stabilire se W è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, se è finitamente generato, e trovare un sistema di generatori.

Soluzione. W è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo nelle incognite $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, quindi è un sottospazio vettoriale (Teorema 2).

Il sistema ha 4 incognite e 3 equazioni. Risolvendo (con rango 3, quindi un parametro libero):

$$\beta = t, \quad \delta = -\frac{t}{2}, \quad \alpha = -t, \quad \gamma = 0,$$

da cui

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Quindi W è finitamente generato e un sistema di generatori è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$.

Il metodo della separazione dei parametri fornisce direttamente la combinazione lineare.

5 Teorema di rappresentazione unica e coordinate

Teorema – Rappresentazione unica rispetto a una base

Sia $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V . Allora ogni vettore $v \in V$ si scrive in **maniera unica** come combinazione lineare degli elementi di B :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione

Esistenza. Poiché B è un sistema di generatori, ogni $v \in V$ ammette almeno una rappresentazione della forma indicata.

Unicità. Supponiamo che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$. Sottraendo:

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = \mathbf{0}_V.$$

Poiché i v_i sono linearmente indipendenti, tutti i coefficienti devono essere nulli: $\lambda_i - \mu_i = 0$ per ogni i , cioè $\lambda_i = \mu_i$. $\square$

Definizione – Coordinate di un vettore

I coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dell'unica rappresentazione di v rispetto alla base $B =$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ si chiamano **coordinate** di v rispetto a B , e si scrive:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Nota – Compatibilità delle coordinate con le operazioni

Le coordinate sono compatibili con le operazioni di spazio vettoriale: se v ha coordinate $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e w ha coordinate $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ rispetto alla stessa base B , allora

$$[v + w]_B = [v]_B + [w]_B, \quad [\alpha v]_B = \alpha[v]_B.$$

Questo stabilisce una corrispondenza perfetta tra i vettori di V e le ennuple di $\mathbb{R}^n$.

6 Dimensione di uno spazio vettoriale

Teorema – Lemma di Steinitz

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato con base $\{v_1, \dots, v_m\}$. Se si considerano $n > m$ vettori $w_1, \dots, w_n \in V$, allora essi sono **linearmente dipendenti**.

Nota – La forza del lemma di Steinitz

Il lemma di Steinitz è potentissimo: per concludere che dei vettori sono linearmente dipendenti non serve fare nessun conto, basta *contare* che sono più numerosi degli elementi di una base. Come commenta il professore: «*non si fa manco un sistema, basta sapere che sono troppi, dove troppi significa più di una base*».

La dimostrazione si basa essenzialmente sul teorema di Rouché-Capelli: esprimendo ogni w_j come combinazione lineare della base, si ottiene un sistema lineare omogeneo con più incognite che equazioni, che ammette quindi soluzioni non nulle.

Esercizio Svolto 7

Stabilire se i seguenti cinque vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti o indipendenti:

$$\left(\frac{1}{4}, -3, \frac{5}{8}, 1\right), (1, 1, 0, -2), \left(\frac{3}{4}, \frac{8}{5}, 1, 7\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, 1, 0\right), \left(-1, 7, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right).$$

Soluzione. La base canonica di $\mathbb{R}^4$ ha 4 elementi. I vettori considerati sono 5, quindi $n = 5 > 4 = m$. Per il Lemma di Steinitz, sono **linearmente dipendenti**. Non è necessario risolvere alcun sistema.

Teorema – Cardinalità costante delle basi

Tutte le basi di uno spazio vettoriale V finitamente generato hanno la stessa cardinalità.

Dimostrazione

Siano B_1 e B_2 due basi di V con $|B_1| = m$ e $|B_2| = n$. Se fosse $n > m$, i vettori di B_2 (che sono $n > m$ vettori in uno spazio con base B_1 di m elementi) sarebbero linearmente dipendenti per il Lemma di Steinitz, contraddicendo il fatto che B_2 è una base. Analogamente, non può essere $m > n$. Quindi $m = n$. $\square$

Definizione – Dimensione di uno spazio vettoriale

Si dice **dimensione** di uno spazio vettoriale V finitamente generato, e si indica con $\dim(V)$, il numero di elementi di una qualsiasi sua base.

Nota – Dimensioni degli spazi notevoli

Le dimensioni dei principali spazi vettoriali sono:

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n, \quad \dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) = mn, \quad \dim(\mathbb{R}_{\leq n}[x]) = n + 1.$$

In particolare, $\dim(\mathbb{R}_{\leq n}[x]) = n + 1$ poiché la base canonica $\{1, x, \dots, x^n\}$ ha $n + 1$ elementi (si conta anche il monomio costante $x^0 = 1$).