

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 5: Sistemi Lineari

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Sistemi lineari · Teorema di Cramer · Rouché-Capelli

Indice

1	Sistemi di equazioni lineari	1
1.1	Definizioni e notazione	1
1.2	Classificazione dei sistemi lineari	2
1.3	Proposizioni fondamentali sui sistemi lineari	3
2	Il Teorema di Cramer	4
2.1	Enunciato e dimostrazione	4
2.2	La Regola di Cramer	5
3	Prodotto matrice-vettore e indipendenza lineare	6
3.1	Il prodotto come combinazione lineare delle colonne	6
3.2	Rango e indipendenza lineare delle colonne e delle righe	7
4	Il Teorema di Rouché-Capelli	9
4.1	Esempi applicativi	10

1 Sistemi di equazioni lineari

1.1 Definizioni e notazione

Definizione – Sistema lineare

Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ è un insieme di equazioni della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (S)$$

dove $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$. Una *soluzione* di (S) è una n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ che verifica *tutte* le equazioni di (S) contemporaneamente. La *soluzione generale* di (S) è l'insieme di tutte le soluzioni.

Ad ogni sistema lineare si associano i seguenti oggetti matriciali.

Definizione – Componenti di un sistema lineare

Dato il sistema (S), definiamo:

- **Matrice incompleta** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$: la matrice dei coefficienti delle incognite,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

- **Vettore colonna dei termini noti** $b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$;
- **Matrice completa** $(A \mid b)$: la matrice ottenuta affiancando b ad A ,

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right);$$

- **Vettore colonna delle incognite** $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Con queste notazioni il sistema (S) si scrive in *forma compatta*

$$AX = b.$$

Esempio di forma compatta

Il sistema $\begin{cases} 2x - 3y + z = -5 \\ x - 3z = 18 \end{cases}$ si scrive in forma matriciale come

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 18 \end{pmatrix}}_b.$$

Definizione – Sistema omogeneo e omogeneo associato

Un sistema lineare è detto *omogeneo* se $b = \mathbf{0}$, cioè se tutti i termini noti sono nulli:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (\text{SO})$$

Dato un sistema non omogeneo (S): $AX = b$, il sistema (SO): $AX = \mathbf{0}$ è detto *sistema omogeneo associato* a (S). La soluzione $X = \mathbf{0}$ di (SO) è sempre disponibile ed è chiamata *soluzione banale*.

1.2 Classificazione dei sistemi lineari

Definizione – Tipi di sistema

Un sistema lineare si dice:

- *compatibile* se ammette almeno una soluzione;
- *determinato* se ammette esattamente una soluzione;
- *indeterminato* se ammette infinite soluzioni;
- *impossibile* (o *incompatibile*) se non ammette alcuna soluzione.

Un sistema omogeneo è sempre compatibile, poiché ammette sempre la soluzione banale.

Nota – Esempi di classificazione

- $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$: **impossibile** — la quantità $2x - y$ non può valere 3 e 5 simultaneamente.
- $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$: **determinato** — soluzione unica $(4, 1)$.

- $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$: **indeterminato** — infinite soluzioni che dipendono da parametri liberi.

1.3 Proposizioni fondamentali sui sistemi lineari

Proposizione – Sistemi omogenei: soluzione non banale implica infinite soluzioni

Sia (SO): $AX = \mathbf{0}$ un sistema omogeneo. Se (SO) ammette una soluzione non banale, allora ne ammette infinite.

Dimostrazione

Sia $\alpha \neq \mathbf{0}$ una soluzione non banale di (SO), ossia $A\alpha = \mathbf{0}$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$A(\lambda\alpha) = \lambda(A\alpha) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Dunque $\lambda\alpha$ è soluzione di (SO) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Poiché $\alpha \neq \mathbf{0}$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ si ottengono infiniti vettori $\lambda\alpha$ distinti. $\square$

Teorema – Struttura delle soluzioni di un sistema non omogeneo

Sia (S): $AX = b$ (con $b \neq \mathbf{0}$) e sia (SO): $AX = \mathbf{0}$ il suo omogeneo associato. Se s è una soluzione di (S) e α è una soluzione di (SO), allora $\beta = s + \alpha$ è ancora una soluzione di (S).

Dimostrazione

Per ipotesi $As = b$ e $A\alpha = \mathbf{0}$. Allora:

$$A\beta = A(s + \alpha) = As + A\alpha = b + \mathbf{0} = b.$$

$\square$

Nota

Il Teorema 1.3 è molto pratico: riduce il problema di trovare *tutte* le soluzioni di $AX = b$ a trovare (i) una singola *soluzione particolare* s di $AX = b$, e (ii) la soluzione generale di $AX = \mathbf{0}$.

Proposizione – Una nessuna o infinite soluzioni

Un sistema lineare non omogeneo (S) è impossibile, oppure ha esattamente una soluzione, oppure ne ha infinite. Non esistono altre possibilità.

Dimostrazione

È sufficiente mostrare che se (S) ha due soluzioni distinte ne ha infinite. Siano $s \neq t$ due soluzioni di $AX = b$, ossia $As = b$ e $At = b$. Allora:

$$A(s - t) = As - At = b - b = \mathbf{0}.$$

Poiché $s \neq t$, il vettore $s - t \neq \mathbf{0}$ è una soluzione *non banale* di (SO). Per la Proposizione 1.3, (SO) ha infinite soluzioni α . Per il Teorema 1.3, le soluzioni di (S) della forma $s + \alpha$ sono infinite e distinte. $\square$

2 Il Teorema di Cramer

2.1 Enunciato e dimostrazione

Concentriamoci ora sui *sistemi quadrati*, ossia con numero di equazioni uguale al numero di incognite: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Teorema – Teorema di Cramer

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il sistema lineare $AX = b$ è determinato per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ se e solo se $\det A \neq 0$.

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Supponiamo $\det A \neq 0$. Allora A è invertibile e ammette inversa A^{-1} . Moltiplicando a sinistra per A^{-1} :

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}b \implies X = A^{-1}b.$$

Poiché A^{-1} è unica, la soluzione è unica.

($\Leftarrow$) Supponiamo che $AX = b$ sia determinato per ogni $b \in \mathbb{R}^n$. In particolare, per ogni colonna e_i della matrice identità I_n , il sistema $AX = e_i$ ha un'unica soluzione α_i . Costruiamo la matrice $B = (\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \mid \alpha_n)$. Allora:

$$AB = A(\alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_n) = (A\alpha_1 \mid \cdots \mid A\alpha_n) = (e_1 \mid \cdots \mid e_n) = I_n.$$

Dunque $B = A^{-1}$, quindi A è invertibile e $\det A \neq 0$. $\square$

Nota – Il caso $\det A = 0$

Quando $\det A = 0$, il sistema non può essere determinato. Il sistema può essere *impossibile* oppure *indeterminato*: la distinzione va fatta caso per caso. Ad esempio, entrambi i sistemi seguenti hanno $\det A = 0$:

- $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -5 \end{cases} : \text{impossibile};$
- $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} : \text{indeterminato}.$

Proposizione – Sistema omogeneo quadrato: soluzioni non banali

Sia (SO): $AX = \mathbf{0}$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora (SO) ha infinite soluzioni se e solo se $\det A = 0$.

Dimostrazione

Un sistema omogeneo è sempre compatibile. Se $\det A \neq 0$, per il Teorema 2.1 il sistema è determinato, quindi l'unica soluzione è $\mathbf{0}$. Se $\det A = 0$, il sistema non può essere determinato; poiché è compatibile, è necessariamente indeterminato. $\square$

Nota

Equivalentemente: un sistema quadrato omogeneo ammette soluzioni non banali se e solo se la sua matrice dei coefficienti ha determinante nullo. Questo fatto è usato spesso per verificare la *dipendenza lineare* di vettori (cfr. Sezione 3).

2.2 La Regola di Cramer

Il Teorema di Cramer fornisce anche una formula esplicita per la soluzione.

Teorema – Regola di Cramer

Sia (S): $AX = b$ un sistema quadrato di ordine n con $\det A \neq 0$. Per ogni $j = 1, \dots, n$, sia Δ_j il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la j -esima colonna con b . Allora la j -esima componente della soluzione è

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det A}.$$

Dimostrazione

La soluzione è $X = A^{-1}b$. Ricordando la formula di Laplace per A^{-1} (con $\mathcal{A}_{ij}$ i cofattori di A):

$$x_j = \frac{1}{\det A} (\mathcal{A}_{1j}b_1 + \mathcal{A}_{2j}b_2 + \dots + \mathcal{A}_{nj}b_n).$$

Il numeratore è lo sviluppo di Laplace di Δ_j rispetto alla j -esima colonna (quella contenente b), quindi coincide con Δ_j . $\square$

Applicazione della regola di Cramer — sistemi 2×2 e 3×3

1) Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$.

Soluzione. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Appliciamo la regola di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-3 - 2}{5} = -1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4 + 1}{5} = 1.$$

Soluzione: $(-1, 1)$.

2) Risolvere il sistema quadrato
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

Soluzione. La matrice incompleta ha $\det A = -6 \neq 0$. Applicando la regola di Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = 0, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = -3, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = 2.$$

Soluzione: $(0, -3, 2)$.

Sistema crameriano per ogni valore del parametro

Discutere e risolvere il sistema al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx + y = 2k - 3 \\ 2x - ky = 3k + 4 \end{cases}.$$

Soluzione. $\det A = \begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & -k \end{vmatrix} = -k^2 - 2$. Poiché $-k^2 - 2 < 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, il determinante non è mai nullo: il sistema è crameriano per ogni k . Applicando la regola di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2k-3 & 1 \\ 3k+4 & -k \end{vmatrix}}{-k^2-2} = \frac{-2k^2-4}{-k^2-2} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} k & 2k-3 \\ 2 & 3k+4 \end{vmatrix}}{-k^2-2} = \frac{3k^2+6}{-k^2-2} = -3.$$

La soluzione è $(2, -3)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$.

3 Prodotto matrice-vettore e indipendenza lineare

3.1 Il prodotto come combinazione lineare delle colonne

Proposizione – Prodotto riga per colonna come combinazione lineare delle colonne

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Il prodotto $A\lambda$ è una combinazione lineare delle colonne di A con coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$A\lambda = \lambda_1 C_1(A) + \lambda_2 C_2(A) + \dots + \lambda_n C_n(A) = \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j(A),$$

dove $C_j(A)$ indica la j -esima colonna di A .

Dimostrazione

L' i -esima componente di $A\lambda$ è $(A\lambda)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j$. Riscrivendo l'intero vettore:

$$A\lambda = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} \lambda_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{mj} \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j(A).$$

□

Nota – Interpretazione per la compatibilità

La Proposizione 3.1 chiarisce geometricamente quando un sistema $AX = b$ è compatibile: la soluzione esiste *se e solo se* b è combinazione lineare delle colonne di A , il che equivale a $\text{rk}(A \mid b) = \text{rk } A$.

3.2 Rango e indipendenza lineare delle colonne e delle righe

Proposizione – Rango massimo e indipendenza lineare delle colonne/righe

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) $\text{rk } A = n$;
- (ii) le colonne di A sono linearmente indipendenti;
- (iii) le righe di A sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione

Dimostriamo (i) $\Leftrightarrow$ (ii); la parte (iii) si ottiene applicando il risultato alla trasposta A^T .

(i) $\Rightarrow$ (ii): Se $\text{rk } A = n$, allora $\det A \neq 0$. Supponiamo per assurdo che le colonne siano linearmente dipendenti: esisterebbe $\lambda \neq \mathbf{0}$ tale che $\lambda_1 C_1(A) + \dots + \lambda_n C_n(A) = \mathbf{0}$. Per la Proposizione 3.1 questo equivale a $A\lambda = \mathbf{0}$ con $\lambda \neq \mathbf{0}$. Ma per il Teorema 2.1 (e la Proposizione 2.1), $\det A \neq 0$ implica che il sistema omogeneo ha solo la soluzione banale: contraddizione. Dunque le colonne sono linearmente

indipendenti.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Se le colonne sono linearmente indipendenti, l'unica combinazione lineare nulla è quella con tutti i coefficienti nulli. Ciò equivale a dire che $A\lambda = \mathbf{0}$ implica $\lambda = \mathbf{0}$: il sistema omogeneo ammette solo la soluzione banale. Per la Proposizione 2.1, $\det A \neq 0$, cioè $\text{rk } A = n$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Poiché $\text{rk } A^T = \text{rk } A$ e $\det A^T = \det A$, applicando l'equivalenza (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ad A^T si ha che le colonne di A^T (cioè le righe di A) sono linearmente indipendenti se e solo se $\text{rk } A = n$. $\square$

Proposizione – Il rango come massimo numero di vettori indipendenti

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Allora $\text{rk } A = r$ se e solo se valgono entrambe le seguenti condizioni:

- (i) esistono r colonne di A linearmente indipendenti;
- (ii) qualsiasi insieme di $r + 1$ colonne di A è linearmente dipendente.

In altre parole:

$$\text{rk } A = n. \max \text{ di colonne lin. indipendenti} = n. \max \text{ di righe lin. indipendenti}.$$

Nota

La Proposizione 3.2 vale anche per matrici *rettangolari*. In particolare, il numero massimo di righe indipendenti coincide sempre con quello delle colonne indipendenti, indipendentemente dalle dimensioni $m \neq n$.

Calcolo del rango per ispezione delle righe

Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Osserviamo due dipendenze lineari immediate tra le righe:

- $R_5 = -R_4$, quindi R_4 e R_5 sono linearmente dipendenti;
- $R_3 = R_1 + R_2$, quindi R_3 è ridondante.

Eliminando le righe dipendenti, il rango di A è uguale al rango della sottomatrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le tre righe di A' sono linearmente indipendenti: R_2 non è multiplo di R_1 (confrontare la sesta colonna: $0 \neq 1$), e R_3 è l'unica riga con una componente non nulla nella prima colonna, quindi non può essere combinazione lineare delle prime due. Pertanto $\text{rk } A = \text{rk } A' = \boxed{3}$.

4 Il Teorema di Rouché-Capelli

Il Teorema di Cramer si limita ai sistemi quadrati con $\det A \neq 0$. Per trattare il caso generale (sistemi rettangolari, o quadrati con determinante nullo) si usa il *Teorema di Rouché-Capelli*, strumento universale di analisi e risoluzione dei sistemi lineari.

Definizione – Infinità di soluzioni

Se la soluzione generale di un sistema lineare compatibile dipende da k parametri liberi, diciamo che il sistema ha ∞^k soluzioni, con la convenzione $\infty^0 = 1$ (soluzione unica).

Teorema – Teorema di Rouché-Capelli

Sia (S): $AX = b$ un sistema lineare di tipo $m \times n$. Allora:

$$(S) \text{ è compatibile} \iff \text{rk } A = \text{rk}(A \mid b).$$

In tal caso, posto $r = \text{rk } A$, il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni.

Dimostrazione

Aggiungere la colonna b ad A non può aumentare il rango di più di 1, quindi $\text{rk } A \leq \text{rk}(A \mid b) \leq \text{rk } A + 1$.

Compatibilità ($\Rightarrow$): Sia α una soluzione di (S), ossia $A\alpha = b$. Per la Proposizione 3.1, b è combinazione lineare delle colonne di A . Dunque b non apporta nuova indipendenza lineare, e $\text{rk}(A \mid b) = \text{rk } A$.

($\Leftarrow$): Se $\text{rk}(A \mid b) = \text{rk } A$, la colonna b è linearmente dipendente dalle colonne di A : esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $b = \sum_j \lambda_j C_j(A) = A\lambda$. Il vettore λ è quindi una soluzione di (S).

Numero di soluzioni: Con $r = \text{rk } A = \text{rk}(A \mid b)$, sia $|M|$ un minore non nullo di ordine r di A . Le $m - r$ righe di A non coinvolte in $|M|$ sono combinazioni lineari di quelle in $|M|$: le equazioni corrispondenti sono ridondanti e si eliminano. Le $n - r$ colonne di A non coinvolte in $|M|$ corrispondono a incognite che non si possono determinare direttamente: vengono *declassate a parametro*. Rimane un sistema quadrato $r \times r$ crameriano nelle restanti r incognite, risolubile con la regola di Cramer in funzione degli $n - r$ parametri liberi. La soluzione generale dipende da $n - r$ parametri, quindi il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni. $\square$

Nota – Connessione con il Teorema di Cramer

Il Teorema di Cramer è un caso particolare di Rouché-Capelli: se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\det A \neq 0$, allora $\text{rk } A = n$. La matrice completa ha al più n righe, quindi

$\text{rk}(A \mid b) \leq n = \text{rk } A$, e poiché il rango non può diminuire si ha $\text{rk}(A \mid b) = n$. Il sistema è compatibile e ha $\infty^{n-n} = \infty^0 = 1$ soluzione.

4.1 Esempi applicativi

Sistema impossibile — riconoscimento tramite rango

Studiare il sistema
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Soluzione. La matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha righe uguali, quindi $\text{rk } A =$

1. La matrice completa è $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$; il minore $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ mostra che $\text{rk}(A \mid b) = 2$. Poiché $\text{rk } A = 1 \neq 2 = \text{rk}(A \mid b)$, il sistema è **impossibile**.

Sistema omogeneo determinato

Studiare il sistema omogeneo
$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}.$$

Soluzione. Un sistema omogeneo è sempre compatibile; $\text{rk } A = \text{rk}(A \mid \mathbf{0})$ è automati-

camente soddisfatto. Si verifica che $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, quindi $\text{rk } A = 3 = n$.

Il sistema ha $\infty^0 = 1$ soluzione: la sola soluzione banale $(0, 0, 0)$.

Sistema indeterminato — declassamento a parametro

Risolvere il sistema omogeneo
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Soluzione. Abbiamo $m = 2$ equazioni, $n = 4$ incognite. La matrice incompleta è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Il minore $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ mostra che $r = \text{rk } A = 2$. Il sistema è compatibile con $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni.

Il minore scelto coinvolge le colonne 1 e 2, quindi declassiamo x_3 e x_4 a parametri

liberi. Il sistema diventa
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 = 2x_4 - x_3 \end{cases}.$$
 Applichiamo la regola di Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3 - x_4 & 1 \\ 2x_4 - x_3 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-(x_3 - x_4) - (2x_4 - x_3)}{-2} = \frac{-x_4}{-2} = \frac{1}{2}x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_3 - x_4 \\ 1 & 2x_4 - x_3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2x_4 - x_3 - (x_3 - x_4)}{-2} = \frac{3x_4 - 2x_3}{-2} = x_3 - \frac{3}{2}x_4.$$

La soluzione generale è

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}x_4, \quad x_3 - \frac{3}{2}x_4, \quad x_3, \quad x_4 \right) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sistema sovradeterminato con parametro k

Discutere e risolvere al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}.$$

Soluzione. La matrice incompleta ha determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1)^2(k+2).$$

Caso $k \neq 1, -2$: $\det A \neq 0$, $\text{rk } A = 3$. Il sistema è determinato; la regola di Cramer dà $x = y = z = \frac{1}{k+2}$.

Caso $k = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{rk } A = 1$. La matrice completa ha anch'essa rango

1. Il sistema ha $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni: $\{(x, y, 1 - x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Caso $k = -2$: $\text{rk } A = 2$ (si verifica con un minore di ordine 2 non nullo), ma $\text{rk}(A \mid b) = 3$. Il sistema è **impossibile**.

Condizione	Tipo	Soluzione generale
$k \neq 1, -2$	determinato	$\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2} \right)$
$k = 1$	∞^2	$\{(x, y, 1 - x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
$k = -2$	impossibile	$\emptyset$