

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 4: Rango

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Sottomatrici · Minori · Rango · Teorema di Kronecker

Indice

1	Sottomatrici e Minori	1
2	Definizione di Rango	2
3	Proprietà del Rango	2
4	Teorema di Kronecker	4
5	Esempi e Applicazioni	4
5.1	Calcolo del rango con Kronecker	4
5.2	Rango con parametro	5

1 Sottomatrici e Minori

Definizione – Sottomatrice

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Scegliamo h righe e k colonne di A : gli elementi di A agli incroci di tali righe e colonne formano una matrice di tipo $h \times k$, detta **sottomatrice** di A . Se $h = k$, la sottomatrice è *quadrata*.

Esercizio Svolto

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ di tipo 3×6 . Selezionando le righe R_1, R_2 e le colonne C_1, C_3, C_4 si ottiene la sottomatrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

di tipo 2×3 .

Definizione – Minore di ordine k

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Chiamiamo **minore di ordine k** di A il determinante di una sottomatrice quadrata di ordine k contenuta in A .

Nota – Conteggio dei minori

Il numero di minori di ordine k in una matrice $m \times n$ è

$$\binom{m}{k} \binom{n}{k}.$$

Ad esempio, in una matrice 3×5 i minori 2×2 sono $\binom{3}{2} \binom{5}{2} = 3 \cdot 10 = 30$, e i minori 3×3 sono $\binom{3}{3} \binom{5}{3} = 1 \cdot 10 = 10$.

Esercizio Svolto

Per la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i minori di ordine 1 (elementi distinti) sono 1, 2, -1, 0. I tre minori di ordine 2 (si scelgono 2 colonne su 3) valgono:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

2 Definizione di Rango

Definizione – Rango di una matrice

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Si chiama **rango** di A , indicato con $\text{rk } A$, il massimo ordine di un minore non nullo di A . Formalmente, $\text{rk } A = r$ se e solo se valgono entrambe le seguenti condizioni:

1. esiste in A un minore non nullo di ordine r ;
2. tutti i minori di A di ordine $> r$ sono nulli.

Per convenzione si pone $\text{rk } \mathbf{0}_{m,n} = 0$.

Nota – Rango e matrice nulla

$\text{rk } A = 0$ se e solo se A è la matrice nulla. Infatti, se $\text{rk } A \geq 1$ esisterebbe almeno un minore 1×1 non nullo, cioè un elemento diverso da zero.

Esercizio Svolto

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. L'elemento $a_{11} = 1 \neq 0$ garantisce $\text{rk } A \geq 1$. Il minore $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ garantisce $\text{rk } A \geq 2$. Non esistono minori di ordine 3 (la matrice ha solo 2 colonne), quindi $\text{rk } A = 2 = \min(3, 2)$.

3 Proprietà del Rango

Proposizione – Risparmio computazionale

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Allora $\text{rk } A = r$ se e solo se:

1. esiste in A un minore non nullo di ordine r ;
2. tutti i minori di ordine $r + 1$ sono nulli.

Dimostrazione

Se tutti i minori di ordine $r + 1$ sono nulli, quelli di ordine $r + 2$ lo sono automaticamente: sviluppando un determinante $(r + 2) \times (r + 2)$ con Laplace si ottiene una combinazione lineare di determinanti $(r + 1) \times (r + 1)$, tutti nulli per ipotesi. Per induzione lo stesso vale per gli ordini $r + 3, r + 4, \dots$, quindi tutti i minori di ordine $> r$ sono nulli. $\square$

Nota – Risparmio pratico

La proposizione 3 dice che, per stabilire se $\text{rk } A = r$, non occorre verificare che *tutti* i minori di ordine $> r$ siano nulli: basta controllare quelli di ordine $r + 1$.

Proposizione – Stima del rango

Per ogni $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ vale

$$\text{rk } A \leq \min(m, n).$$

Proposizione – Rango della trasposta

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Allora $\text{rk } A^T = \text{rk } A$.

Dimostrazione

Poiché i determinanti possono essere sviluppati tanto rispetto alle righe quanto alle colonne, A e A^T hanno esattamente gli stessi minori (a meno dell'ordine delle righe e colonne), e quindi lo stesso rango. $\square$

Proposizione – Rango e invertibilità

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $\text{rk } A = n$;
2. $\det A \neq 0$;
3. A è invertibile ($A \in GL_n(\mathbb{R})$).

Dimostrazione

Se $\text{rk } A = n$, esiste un minore non nullo di ordine n . Per una matrice quadrata di ordine n , l'unico minore di ordine n è il determinante stesso. Dunque $\det A \neq 0$, che è la condizione per l'invertibilità (Teorema di Laplace). $\square$

Nota – Matrice singolare

Una matrice quadrata A con $\det A = 0$ si dice **singolare**. Il termine deriva dal latino *singularis* (unico, eccezionale): la non invertibilità è il caso degenerato, quello eccezionale, mentre la generalità delle matrici è invertibile.

4 Teorema di Kronecker

Definizione – Matrice orlata e minore orlato

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e sia B una sua sottomatrice quadrata di ordine k . Si dice che una sottomatrice quadrata C di B di ordine $h < k$ è **orlata** da B : ovvero B è una *matrice orlata* di C . Analogamente, il determinante di B è detto **minore orlato** del determinante di C .

In altre parole, B si ottiene da C aggiungendo righe e colonne di A “intorno” a C (da cui il termine *orlo*).

Esercizio Svolto

Sia $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La sottomatrice $C = (a_{33}) = (1)$ è di ordine 1. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è un'orlata di ordine 2 di C , e B stessa è un'orlata di ordine 3 di C .

Teorema – Kronecker

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Allora $\text{rk } A = r$ se e solo se:

1. esiste in A un minore non nullo di ordine r ;
2. tutti gli **orlati** di ordine $r + 1$ di tale minore sono nulli.

Nota – Risparmio di Kronecker

Il guadagno rispetto alla Proposizione 3 è notevole: invece di controllare *tutti* i minori di ordine $r + 1$, basta controllare solo quelli che orlano il minore non nullo fissato al passo 1. Se almeno uno di essi è non nullo, il rango supera r ; se sono tutti nulli, il rango è esattamente r .

5 Esempi e Applicazioni

5.1 Calcolo del rango con Kronecker

Esercizio Svolto

Calcolare il rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione.

1. $a_{11} = 1 \neq 0$, quindi $\text{rk } A \geq 1$.

2. Orliamo (a_{11}) con la riga 2 e la colonna 2: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$. Proviamo con la riga 2 e la colonna 3: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, quindi $\text{rk } A \geq 2$. Fissiamo $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (righe 1, 2, colonne 1, 3).
3. Orliamo M_2 con la riga 3 e la colonna 2:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (0 - 0) - 2 \cdot (0 - 0) + 1 \cdot (1 - 0) = 1 \neq 0,$$

quindi $\text{rk } A \geq 3$. Fissiamo M_3 come questo minore.

4. Orliamo M_3 con la riga 4 e l'unica colonna rimasta (col. 4). Le righe 3 e 4 di A sono identiche $(0 \ 1 \ 0 \ 0)$, quindi ogni minore 4×4 ha due righe uguali ed è nullo. Pertanto $\text{rk } A = 3$.

5.2 Rango con parametro

Esercizio Svolto

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione.

1. $a_{11} = 1 \neq 0$, quindi $\text{rk } A \geq 1$.
2. Il minore formato dalle righe 2, 3 e colonne 2, 3 vale $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$, quindi $\text{rk } A \geq 2$. Fissiamo M_2 con righe $\{2, 3\}$, colonne $\{2, 3\}$.
3. Dobbiamo controllare *tutti* gli orlati 3×3 di M_2 . Ne consideriamo due (aggiungendo rispettivamente la riga 1 o la riga 4, e la colonna 1 come unica colonna residua):

- **Orlato con riga 1, colonna 1:**

$$\det \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 1(-4 + 1) - k(-2) + 0 = -3 + 2k.$$

Questo vale 0 per $k = \frac{3}{2}$.

- Orlato con riga 4, colonna 1:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= 1(-1 - 0) - 2(0 - (-2)) + (-1)(0 - 1) \\ &= -1 - 4 + 1 = -4 \neq 0.\end{aligned}$$

Il secondo orlato è non nullo per ogni k , quindi $\text{rk } A \geq 3$ per ogni k .

4. La matrice è 4×3 , dunque $\text{rk } A \leq \min(4, 3) = 3$. Non esistono minori di ordine 4 (mancano le colonne). Pertanto

$$\boxed{\text{rk } A = 3 \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{R}.}$$

Nota – Attenzione agli orlati!

Nell'applicazione del Teorema di Kronecker è fondamentale controllare *tutti* gli orlati di ordine $r + 1$ del minore fissato. Se almeno uno di essi è non nullo (anche al variare di parametri), il rango sale. Solo quando sono *tutti* nulli si può concludere che il rango è r .