

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 3: Determinanti

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Combinazioni lineari · Dipendenza e indipendenza lineare · Determinanti ·
Formula di Laplace · Regola di Sarrus · Proprietà dei determinanti · Teorema di Binet ·
Matrici invertibili

Indice

1	Algebra lineare in $\mathbb{R}^n$	1
1.1	Verificare se un vettore è combinazione lineare	1
2	Dipendenza e indipendenza lineare	2
2.1	Criteri di dipendenza lineare	2
3	Determinanti	3
3.1	Definizione ricorsiva	3
3.2	Formula di Laplace	4
4	Regola di Sarrus (solo per 3×3)	6
5	Proprietà dei determinanti	6
6	Teorema di Binet	8
7	Matrici invertibili	8
7.1	Proprietà dell'inversa	9
7.2	Criterio di invertibilità e formula dell'inversa	9

1 Algebra lineare in $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ è costituito dalle n -uple ordinate di numeri reali $(a_1, \dots, a_n)$, che possono essere pensate come vettori riga ($1 \times n$) o colonna ($n \times 1$): sono la stessa cosa, cambia solo la rappresentazione. Li indicheremo con lettere minuscole bold $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}$, ecc.

Definizione – Combinazione lineare (Def. 3.1)

Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$. Si chiama **combinazione lineare** dei $\mathbf{v}_i$ ogni vettore della forma

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n,$$

al variare di $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, detti **coefficienti** della combinazione lineare.

Nota – Esempi immediati

- Il **vettore nullo** $\mathbf{0}$ è sempre una combinazione lineare (tutti $\lambda_i = 0$): si chiama *combinazione lineare banale*.
- Ogni $\mathbf{v}_k$ è combinazione lineare dell'insieme ($\lambda_k = 1$, gli altri $= 0$).
- La somma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ è combinazione lineare con tutti i coefficienti $= 1$.

1.1 Verificare se un vettore è combinazione lineare

Per stabilire se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$, si imposta l'equazione vettoriale $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{v}$ nelle incognite λ_i : si ottiene un sistema lineare di n equazioni. Se è **compatibile**, $\mathbf{v}$ è combinazione lineare; altrimenti no.

Esercizio Svolto

Determinare se $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 1)$.

Soluzione. Impostando il sistema si ottiene:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione $\lambda_1 = 0$. Le restanti danno $\lambda_2 - \lambda_3 = 1$ e $\lambda_2 - \lambda_3 = 2$: contraddizione. Il sistema è **impossibile**, quindi $\mathbf{v}$ **non** è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Esercizio Svolto

Per quali $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, 1, k)$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, k)$?

Soluzione. Il sistema associato risulta compatibile per **ogni** $k \in \mathbb{R}$: il vettore $(1, 1, k)$ è sempre combinazione lineare dei vettori dati, qualunque sia il parametro.

2 Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione – Linearmente dipendenti (Def. 3.2)

I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente dipendenti (LD)** se esistono coefficienti *non tutti nulli* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}.$$

Definizione – Linearmente indipendenti (Def. 3.3)

I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente indipendenti (LI)** se l'unica combinazione lineare uguale a $\mathbf{0}$ è quella banale:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Nota – Procedura pratica

Si risolve il sistema omogeneo $\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$: unica soluzione $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{LI}$; soluzioni non banali $\Rightarrow \mathbf{LD}$.

Esercizio Svolto

Decidere se $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -1)$ sono LI o LD.

Soluzione. Il sistema omogeneo $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ si riduce a:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$: i vettori sono **linearmente indipendenti**.

2.1 Criteri di dipendenza lineare

Proposizione – Criteri sufficienti di LD (Prop. 3.4)

Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$. Allora:

- (i) Se uno dei vettori è il **vettore nullo**, allora sono LD.
- (ii) Se ci sono **due vettori uguali** ($\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$), allora sono LD.
- (iii) Se ci sono **due vettori proporzionali** ($\mathbf{v}_i = \alpha \mathbf{v}_j$, $\alpha \neq 0$), allora sono LD.

Dimostrazione

- (i) Se $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, scegliere $\lambda_k = 1$ e tutti gli altri $= 0$ dà $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ con coefficienti non tutti nulli.
- (ii) Se $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$, scegliere $\lambda_i = 1$, $\lambda_j = -1$, gli altri $= 0$: $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$.
- (iii) Se $\mathbf{v}_i = \alpha \mathbf{v}_j$, scegliere $\lambda_i = 1$, $\lambda_j = -\alpha$, gli altri $= 0$: $\mathbf{v}_i - \alpha \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$. □

Proposizione – Caratterizzazione dei vettori LD (Prop. 3.5)

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente dipendenti** se e solo se uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti.

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Sia $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ con $\lambda_1 \neq 0$. Allora:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \mathbf{v}_m.$$

($\Leftarrow$) Se $\mathbf{v}_1 = \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{v}_m$, allora $(-1)\mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ con coefficiente $-1 \neq 0$. $\square$

Nota

Corollario. Due vettori sono LD se e solo se uno è multiplo dell'altro.

3 Determinanti

La funzione determinante associa a ogni matrice **quadrata** un numero reale. È definita ricorsivamente: il determinante di ordine n si riduce al calcolo di determinanti di ordine $n - 1$.

Nota

Il determinante di A si indica con $\det A$ oppure $|A|$. Attenzione: per $n = 1$ non va confuso col valore assoluto.

3.1 Definizione ricorsiva

Definizione – Ordine 1 (Def. 3.6)

Sia $A = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Il **determinante** di A è $\det A = a$.

Definizione – Ordine 2 (Def. 3.7)

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il **determinante** di A è:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Regola: prodotto della diagonale principale meno prodotto dell'anti-diagonale.

Nota – Esempi (ordine 2)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 2 + 8 = 10. \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0 \text{ (righe uguali).}$$

Definizione – Sottomatrice complementare (Def. 3.8)

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La **sottomatrice complementare** di a_{ij} , indicata $\tilde{A}_{ij}$, è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta eliminando la riga i e la colonna j di A .

Nota – Esempio

$$\text{Per } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}: \quad \tilde{A}_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{31} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definizione – Complemento algebrico / cofattore (Def. 3.9)

Il **complemento algebrico** (o *cofattore*) di a_{ij} è:

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}.$$

Il fattore $(-1)^{i+j}$ è il **segno del posto**: in alto a sinistra è $+$, poi si alterna in orizzontale e verticale (*regola della scacchiera*).

+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Regola della scacchiera: il segno di $(-1)^{i+j}$ si legge direttamente dalla griglia.

3.2 Formula di Laplace

Definizione – Sviluppo rispetto alla prima riga (Def. 3.10)

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Il **determinante di A sviluppato rispetto alla prima riga** è:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{1j} \mathcal{A}_{1j} = a_{11} \mathcal{A}_{11} + a_{12} \mathcal{A}_{12} + \cdots + a_{1n} \mathcal{A}_{1n}.$$

Definizione – Sviluppo rispetto alla riga i o alla colonna j (Def. 3.11)

Più in generale, rispetto alla **riga** i :

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathcal{A}_{ij},$$

oppure rispetto alla **colonna** j :

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathcal{A}_{ij}.$$

Teorema – Laplace (Teo. 3.12)

Il determinante calcolato rispetto a *qualsiasi* riga o colonna produce **sempre lo stesso risultato**.

Nota – Consiglio pratico

Si sceglie sempre la riga o colonna con il **maggior numero di zeri** per minimizzare i calcoli.

Esercizio Svolto

Calcolare $\det A$ per $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Sviluppo rispetto alla prima riga (c'è uno zero in posizione $(1, 2)$):

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 0 + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1 - 2) + 2 \cdot (1 - 1) = -1.$$

Verifica col Teorema 3.2: sviluppando rispetto alla seconda colonna si ottiene -1 .
✓

Esercizio Svolto

Calcolare il determinante di $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Si sviluppa rispetto alla prima riga, eliminando i termini in posizione $(1, 2)$ e $(1, 3)$ che sono nulli:

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+4} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con la Regola di Sarrus (vedi Sezione 4): il primo 3×3 vale 1, il secondo vale -3 .

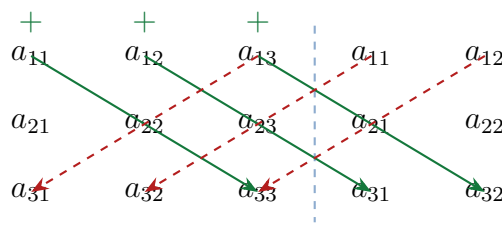
Quindi $\det A = 1 + 2 \cdot (-3) = -5$.

4 Regola di Sarrus (solo per 3×3)

Definizione – Regola di Sarrus (Def. 3.13)

Per una matrice A di ordine 3, si ricopiano le prime due colonne a destra della terza. Si sommano i prodotti delle diagonali *principali* ($\searrow$) e si sottraggono i prodotti delle diagonali *secondarie* ($\swarrow$):

$$\det A = \underbrace{(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})}_{\text{diagonali principali}} - \underbrace{(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})}_{\text{diagonali secondarie}}.$$



Frecce verdi (+) per le diagonali principali, rosse tratteggiate (-) per le secondarie.

Nota – Attenzione!

La regola di Sarrus **non si generalizza** a ordini superiori a 3. Per $n \geq 4$ usare esclusivamente lo sviluppo di Laplace.

Esercizio Svolto

Calcolare $\det A$ per $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Soluzione.

$$\begin{aligned} \det A &= (1 \cdot 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 2) - ((-1) \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot (-2)) \\ &= (0 + 1 - 4) - (0 + 2 - 4) = (-3) - (-2) = -1. \end{aligned}$$

5 Proprietà dei determinanti

Proposizione – Proprietà immediate (Prop. 3.14)

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora:

- (i) $\det \mathbf{0}_n = 0$.
- (ii) Riga o colonna nulla $\Rightarrow \det A = 0$.

- (iii) A **triangolare** (sup. o inf.) $\Rightarrow \det A = \prod_{k=1}^n a_{kk}$.
- (iv) A **diagonale** $\Rightarrow \det A = \prod_{k=1}^n a_{kk}$ (corollario di (iii)).
- (v) $\det I_n = 1$ (corollario di (iv)).
- (vi) $\det A^T = \det A$.

Dimostrazione

(i)(ii): sviluppando rispetto alla riga/colonna nulla, ogni termine è zero.

(iii) *Per induzione su n . Base $n = 1$: $\det(a_{11}) = a_{11}$. ✓*

Passo induttivo: sia A triangolare superiore $n \times n$. L'ultima riga ha $a_{n1} = \dots = a_{n,n-1} = 0$. Sviluppando rispetto ad essa:

$$\det A = a_{nn} (-1)^{2n} \det \tilde{A}_{nn} = a_{nn} \det \tilde{A}_{nn}.$$

$\tilde{A}_{nn}$ è triangolare superiore di ordine $n - 1$ con diagonale $a_{11}, \dots, a_{n-1,n-1}$. Per ipotesi induttiva $\det \tilde{A}_{nn} = \prod_{k=1}^{n-1} a_{kk}$, quindi $\det A = \prod_{k=1}^n a_{kk}$.

(vi) Le colonne di A^T sono le righe di A : sviluppare rispetto a righe o colonne dà lo stesso risultato. $\square$

Proposizione – Proprietà di trasformazione (Prop. 3.15)

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- (i) Moltiplicare una riga (o colonna) per λ moltiplica $\det A$ per λ .
- (ii) Se la riga i di A è somma di due vettori, $\det$ si scompone in somma di due determinanti (*additività*).
- (iii) Il determinante è **lineare** rispetto a ciascuna riga (o colonna) separatamente.
- (iv) Scambiare due righe (o colonne): $\det A$ **cambia di segno**.
- (v) Due righe (o colonne) uguali $\Rightarrow \det A = 0$.
- (vi) Due righe (o colonne) proporzionali $\Rightarrow \det A = 0$.
- (vii) Sommare a una riga un multiplo di un'altra riga: $\det A$ **non cambia**.
- (viii) Sommare a una riga una combinazione lineare delle rimanenti: $\det A$ non cambia.
- (ix) Righe (o colonne) LD $\Rightarrow \det A = 0$.

Dimostrazione

(i) I cofattori $\mathcal{A}_{ij}$ non dipendono dalla riga i , quindi: $\det A' = \sum_j \lambda a_{ij} \mathcal{A}_{ij} = \lambda \sum_j a_{ij} \mathcal{A}_{ij} = \lambda \det A$.

(ii) Dalla (i): $\det A = \sum_j (b_{ij} + c_{ij}) \mathcal{A}_{ij} = \det B + \det C$.

(v) Se A ha due righe uguali, scambiarle non cambia A ma (per (iv)) $\det A = -\det A$, quindi $\det A = 0$.

(vi) Se $R_j = \lambda R_i$, per (i) si fattorizza λ e si ottiene una matrice con due righe uguali: per (v) il $\det$ è 0.

(vii) Per (ii) e (vi): $\det(\dots, R_i + \lambda R_j, \dots) = \det A + \lambda \cdot 0 = \det A$. $\square$

Nota – Conseguenze importanti

- Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ (ogni riga si moltiplica per λ).
- In generale $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ (la linearità è riga per riga, non su tutta la matrice).

Nota – Riduzione alla Gauss per i determinanti

Le proprietà (vii) e (viii) permettono di applicare operazioni elementari di riga (come nell'eliminazione di Gauss) senza alterare il determinante. Si creano il maggior numero possibile di zeri e poi si usa Laplace o si riduce a forma triangolare (il det è il prodotto degli elementi diagonali). Si tiene traccia dei soli **scambi di riga** (ogni scambio moltiplica il det per -1).

6 Teorema di Binet

Teorema – Binet (Teo. 3.16)

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Nota

Il determinante si distribuisce sul **prodotto** (non sulla somma). Conseguenza diretta: se A è invertibile, $\det A \cdot \det A^{-1} = \det I_n = 1$, quindi $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

7 Matrici invertibili

Definizione – Matrice invertibile (Def. 3.17)

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è **invertibile** (o *non singolare*) se esiste $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che

$$AB = BA = I_n.$$

B è l'**inversa** di A e si indica A^{-1} .

Nota

La matrice nulla **non è invertibile**. La matrice identità è invertibile con $I_n^{-1} = I_n$.

Esercizio Svolto

Calcolare A^{-1} per $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Imponendo $AA' = I_2$ con $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} 2x + z = 1, & z = 0 \\ 2y + t = 0, & t = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 0, t = 1.$$

Quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Verifica: $AA^{-1} = I_2$. ✓

7.1 Proprietà dell'inversa

Proposizione – Proprietà (Prop. 3.18)

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertibili. Allora:

- (i) **Unicità.** L'inversa è unica.
- (ii) **Inversa dell'inversa.** $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (iii) **Inversa del prodotto.** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dimostrazione

- (i) Siano A', A'' inverse di A : $A' = A'I_n = A'(AA'') = (A'A)A'' = I_n A'' = A''$.
- (ii) Per definizione $A^{-1} \cdot A = I_n$ e $A \cdot A^{-1} = I_n$: A è l'inversa di A^{-1} .
- (iii) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$. □

Nota – Gruppo lineare generale

L'insieme $GL_n(\mathbb{R})$ di tutte le matrici invertibili di ordine n con la moltiplicazione è il **gruppo lineare generale di ordine n** . Non è commutativo per $n \geq 2$.

7.2 Criterio di invertibilità e formula dell'inversa

Teorema – Laplace per la matrice inversa (Teo. 3.19)

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è invertibile **se e solo se** $\det A \neq 0$. In tal caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof}(A))^T$$

dove $\text{cof}(A)$ è la **matrice dei cofattori**: $\text{cof}(A)_{ij} = \mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}$.

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Se A è invertibile, per il Teorema di Binet 6:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1.$$

Quindi $\det A \neq 0$ e $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

($\Leftarrow$) Se $\det A \neq 0$, la formula $A' = \frac{1}{\det A}(\text{cof}(A))^T$ soddisfa $AA' = I_n$ grazie alle proprietà degli sviluppi di Laplace. Per l'unicità (Prop. 7.1(i)), $A' = A^{-1}$. $\square$

Nota – Formula esplicita per 2×2

Per $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\det A = ad - bc \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Regola pratica: si scambiano gli elementi sulla diagonale e si cambiano di segno quelli sull'anti-diagonale, poi si divide per il determinante.

Esercizio Svolto

Calcolare A^{-1} per $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Sviluppando rispetto alla terza colonna (due zeri):

$$\det A = 3 \cdot (+1) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 = 15 \neq 0.$$

Si calcolano i 9 cofattori e si ottiene:

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & 12 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 12 \\ 5 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio Svolto

Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile?

Soluzione. Sviluppando rispetto alla prima riga:

$$\det A = 1 \cdot (1 - 0) - k \cdot (0 - k^2) + 0 = 1 + k^3.$$

A è invertibile $\iff 1 + k^3 \neq 0 \iff k \neq -1$.