

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 2: Matrici

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Definizioni e tipi di matrici · Operazioni tra matrici · Matrici simmetriche e antisimmetriche · Prodotto riga per colonna · Trasposizione

Indice

1	Definizioni fondamentali	1
1.1	Tipi particolari di matrici	2
2	Operazioni tra matrici	3
2.1	Somma e prodotto per scalare	3
3	Matrici simmetriche e antisimmetriche	5
4	Prodotto riga per colonna	7

1 Definizioni fondamentali

Definizione – Matrice

Siano m, n numeri naturali positivi. Una **matrice di tipo** $m \times n$ è una tabella con m righe e n colonne. Il generico elemento a_{ij} si trova sulla i -esima riga e sulla j -esima colonna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a coefficienti reali è indicato con $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Nota – Esempio concreto

Una matrice di tipo 2×3 a coefficienti reali è ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha $a_{11} = 1$, $a_{12} = \frac{1}{3}$, $a_{13} = -1$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 1$.

Nota – Notazione per righe e colonne

La i -esima riga di A si indica con $R_i(A) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, mentre la j -esima colonna con:

$$C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Le matrici di $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ si chiamano **vettori riga**, quelle di $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ **vettori colonna**. La matrice con tutti elementi nulli è la **matrice nulla** $0_{m,n}$.

Nota – Visualizzazione grafica (tabella)

Per evidenziare righe e colonne, la stessa matrice può essere letta anche come tabella:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \iff \left(\begin{array}{c|ccc} & C_1 & C_2 & C_3 \\ R_1 & 1 & 0 & -1 \\ R_2 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Nell'esempio è evidenziato a_{23} : la cella in comune tra la riga R_2 (verde) e la colonna C_3 (azzurro).

1.1 Tipi particolari di matrici

Definizione – Matrice quadrata

Una matrice con lo stesso numero di righe e colonne n è detta **matrice quadrata di ordine n** . L'insieme $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ si indica con $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formano la **diagonale principale**. A seconda di dove si trovano gli zeri, si distinguono i seguenti tipi:

Diagonale
 $a_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

Triangolare sup.
 $a_{ij} = 0 \quad (j < i)$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Triangolare inf.
 $a_{ij} = 0 \quad (i < j)$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

■ diagonale principale ■ elementi liberi (sup.) ■ elementi liberi (inf.) ■ zero forzato

Le matrici diagonali sono sia triangolari superiori che inferiori: tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli.

Esempi numerici:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{diagonale}),$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (\text{trian. sup.}),$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (\text{trian. inf.}).$$

Definizione – Matrice identità

La **matrice identità di ordine n** , indicata con I_n , è la matrice diagonale con tutti 1 sulla diagonale principale. Per $n = 3$:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gli elementi in **azzurro** costituiscono la diagonale principale; quelli in **grigio** sono i valori nulli forzati.

Nota – Principio di identità

Due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ dello stesso tipo $m \times n$ sono **uguali** se e solo se $a_{ij} = b_{ij}$ per ogni i, j .

Definizione – Matrice trasposta

Data $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la **trasposta** A^T è la matrice di tipo $n \times m$ definita da:

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

cioè si scambiano righe e colonne. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota – Trasposta in forma tabellare

Nella rappresentazione a griglia, la trasposizione si legge in modo immediato:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} & C_1 & C_2 & C_3 \\ \hline R_1 & 1 & 0 & -1 \\ R_2 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow A^T = \left(\begin{array}{c|cc} & C_1 & C_2 \\ \hline R_1 & 1 & 2 \\ R_2 & 0 & -1 \\ R_3 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

La riga $R_1(A)$ (azzurro) diventa la colonna $C_1(A^T)$, mentre $R_2(A)$ (verde) diventa $C_2(A^T)$.

2 Operazioni tra matrici

2.1 Somma e prodotto per scalare

Definizione – Somma di matrici

Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici di tipo $m \times n$. La loro **somma** è la matrice $A + B = (c_{ij})$ con:

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j$$

Proposizione – Proprietà della somma

Siano $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Valgono:

- (i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(associativa)*
- (ii) $A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A$ *(elemento neutro)*
- (iii) Esiste $(-A)$ tale che $A + (-A) = 0_{m,n}$ *(elemento opposto)*
- (iv) $A + B = B + A$ *(commutativa)*

La **matrice opposta** è $-A = (-a_{ij})$; la **sottrazione** è $A - B := A + (-B)$.

Dimostrazione

Dimostriamo la (iv); le altre seguono in modo analogo dalle proprietà di $\mathbb{R}$. Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. L'elemento di posto i, j di $A + B$ è $a_{ij} + b_{ij}$, quello di $B + A$ è $b_{ij} + a_{ij}$. Poiché la somma in $\mathbb{R}$ è commutativa, $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ per ogni i, j , quindi $A + B = B + A$.

Per la (iii), si definisce $-A := (-a_{ij})$; allora l'elemento di posto i, j di $A + (-A)$ è $a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$, dunque $A + (-A) = 0_{m,n}$. $\square$

Definizione – Prodotto per scalare

Siano $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\varrho \in \mathbb{R}$. Il **prodotto scalare** ϱA è la matrice con elementi $c_{ij} := \varrho a_{ij}$.

Proposizione – Proprietà del prodotto per scalare

Siano $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\varrho, \mu \in \mathbb{R}$:

- (i) $\varrho(A + B) = \varrho A + \varrho B$
- (ii) $(\varrho + \mu)A = \varrho A + \mu A$
- (iii) $\varrho(\mu A) = (\varrho\mu)A$
- (iv) $1 \cdot A = A$

Dimostrazione

Dimostriamo la (i). L'elemento di posto i, j di $\varrho(A + B)$ è $\varrho(a_{ij} + b_{ij})$. Per distributività in $\mathbb{R}$ si ha $\varrho(a_{ij} + b_{ij}) = \varrho a_{ij} + \varrho b_{ij}$, che è esattamente l'elemento di posto i, j di $\varrho A + \varrho B$. Le altre proprietà seguono analogamente. $\square$

Esercizio Svolto

Date $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcolare $A + 3B - (2A + 0_{2,2} + 4B)$.

Soluzione. Semplificando prima di calcolare (per la Proposizione 2.1 e 2.1):

$$A + 3B - (2A + 4B) = -A - B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Proposizione – Trasposizione e operazioni

Siano $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\varrho \in \mathbb{R}$:

- (i) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (ii) $(\varrho A)^T = \varrho A^T$
- (iii) $(A^T)^T = A$

Dimostrazione

Per la (i): l'elemento di posto i, j di $(A+B)^T$ è l'elemento di posto j, i di $A+B$, cioè $a_{ji} + b_{ji}$. D'altra parte, l'elemento di posto i, j di $A^T + B^T$ è $a_{ji} + b_{ji}$. Coincidono. Le altre seguono per lo stesso ragionamento. $\square$

3 Matrici simmetriche e antisimmetriche

Definizione – Simmetrica e antisimmetrica

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si dice che:

- A è **simmetrica** se $A^T = A$;
- A è **antisimmetrica** se $A^T = -A$.

Proposizione – Criterio esplicito

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora:

- (i) A è simmetrica $\iff a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j ;
- (ii) A è antisimmetrica $\iff a_{ij} = -a_{ji}$ per $i \neq j$ e $a_{ii} = 0$ per ogni i .

Dimostrazione

La (i) segue direttamente dall'uguaglianza $A^T = A$ elemento per elemento: $(A^T)_{ij} = a_{ji} = a_{ij}$.

Per la (ii), fuori dalla diagonale ($i \neq j$): $(A^T)_{ij} = a_{ji} = -a_{ij}$. Sulla diagonale ($i = j$): dalla definizione $A^T = -A$ segue $a_{ii} = -a_{ii}$, e l'unico numero reale uguale al proprio opposto è 0, quindi $a_{ii} = 0$. $\square$

Nota

La matrice nulla 0_n è sia simmetrica che antisimmetrica. Più in generale, se A è sia simmetrica che antisimmetrica, allora $A^T = A = -A$, da cui $2A = 0$, quindi $A = 0_n$.

Proposizione – Stabilità per somma e scalare

Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\varrho \in \mathbb{R}$. Allora:

- (i) Se A e B sono entrambe simmetriche (resp. antisimmetriche), anche $A + B$ è simmetrica (resp. antisimmetrica).
- (ii) Se A è simmetrica (resp. antisimmetrica), anche ϱA è simmetrica (resp. antisimmetrica).
- (iii) Se A è sia simmetrica che antisimmetrica, allora $A = 0_n$.

Dimostrazione

Per la (i): se $A^T = A$ e $B^T = B$, allora $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$. Analogamente per l'antisimmetrica. Per la (ii): $(\rho A)^T = \rho A^T = \rho A$. Per la (iii): $A^T = A$ e $A^T = -A$ implicano $A = -A$, cioè $2A = 0$, quindi $A = 0_n$. $\square$

Nota – Esempi

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è simmetrica ($a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i, j). La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è antisimmetrica (diagonale nulla, $a_{ij} = -a_{ji}$). La matrice nulla 0_n è l'unica che è entrambe le cose.

Teorema – Decomposizione simmetrica-antisimmetrica

Sia $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Allora esistono e sono *uniche* una matrice S simmetrica e una matrice A antisimmetrica tali che $M = S + A$, dove:

$$S = \frac{1}{2}(M + M^T), \quad A = \frac{1}{2}(M - M^T)$$

S è detta la **parte simmetrica** di M , A la **parte antisimmetrica**.

Dimostrazione

Esistenza. Si verifica direttamente che $S + A = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) = M$. Usando la Proposizione 2.1:

$$S^T = \frac{1}{2}(M + M^T)^T = \frac{1}{2}(M^T + M) = S$$

$$A^T = \frac{1}{2}(M - M^T)^T = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A$$

quindi S è simmetrica e A è antisimmetrica.

Unicità. Se $M = S' + A'$ con S' simmetrica e A' antisimmetrica, allora $S + A = S' + A'$, cioè $S - S' = A' - A$. Il membro sinistro è simmetrico e il destro è antisimmetrico; l'unica matrice con entrambe le proprietà è 0_n , quindi $S = S'$ e $A = A'$. $\square$

Esercizio Svolto

Decomporre $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ in parte simmetrica e antisimmetrica.

Soluzione. Per il Teorema 3:

$$S = \frac{1}{2}(N + N^T) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad A = N - S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Si noti che S è simmetrica (per la Proposizione 3) e A è antisimmetrica con diagonale nulla, come atteso.

4 Prodotto riga per colonna

Definizione – Prodotto riga $\times$ colonna

Siano $A = (a_1, \dots, a_n)$ un vettore riga e $B = (b_1, \dots, b_n)^T$ un vettore colonna, entrambi di dimensione n . Il loro **prodotto** è il numero reale:

$$AB = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \sum_{k=1}^n a_kb_k$$

Definizione – Prodotto tra matrici

Siano $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La **matrice prodotto** $C = AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ ha elementi:

$$c_{ij} := R_i(A) \cdot C_j(B) = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Attenzione: il prodotto è definito solo quando il numero di colonne di A coincide con il numero di righe di B .

Nota – Visualizzazione del prodotto

Una lettura grafica utile è:

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R}), \quad (A, B) \mapsto AB.$$

Nel seguente esempio è evidenziato il calcolo di c_{12} :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1(A) \cdot C_2(B) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = c_{12} = 1$$

Esercizio Svolto

Calcolare $C = AB$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluzione. C è di tipo 2×3 :

$$C = \begin{pmatrix} 2+1+2 & 2+0-1 & 2-1-2 \\ 1-1+2 & 1+0-1 & 1+1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposizione – Proprietà del prodotto

Siano A, B, C matrici di dimensioni opportune e $\varrho \in \mathbb{R}$:

- (i) $(AB)C = A(BC)$ *(associativa)*
- (ii) $A(B + C) = AB + AC$ *(distributiva a destra)*
- (iii) $(B + C)A = BA + CA$ *(distributiva a sinistra)*
- (iv) $(\varrho A)B = A(\varrho B) = \varrho(AB)$
- (v) $A \cdot 0_{n,p} = 0_{m,p}$ e $0_{q,m} \cdot A = 0_{q,n}$
- (vi) $A \cdot I_n = A$ e $I_m \cdot A = A$

Nota – Non commutatività!

Il prodotto tra matrici **non è in generale commutativo**. Anche quando entrambi i prodotti AB e BA sono definiti (ad es. A, B quadrate dello stesso ordine), può accadere che $AB \neq BA$. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB \neq BA$$

Le uniche matrici che commutano con tutte le altre in $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sono le **matrici scalari** ϱI_n con $\varrho \in \mathbb{R}$.

Nota – Legge di annullamento NON vale!

Anche quando $AB = 0$, **non** si può concludere che $A = 0$ o $B = 0$. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

Analogamente, $AB = AC$ **non** implica $B = C$ (non vale la legge di cancellazione).

Nota – Potenze di matrici

Quando si moltiplica k volte una matrice quadrata A per sé stessa, si usa la

notazione:

$$A^k := \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ volte}}, \quad A^0 := I_n$$

Per la Proposizione 4(i) vale $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$ e $(A^m)^k = A^{mk}$.

Teorema – Trasposizione e prodotto

Siano $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Allora:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

(l'ordine si inverte!)

Dimostrazione

Osserviamo che $(AB)^T$ è di tipo $p \times m$, e lo è anche $B^T A^T$. L'elemento di posto i, j di $(AB)^T$ è l'elemento di posto j, i di AB :

$$(AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$$

L'elemento di posto i, j di $B^T A^T$ è:

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$$

Le due quantità coincidono per ogni i, j . □

Esercizio Svolto

Sia A una matrice quadrata qualsiasi. Dimostrare che AA^T è simmetrica.

Soluzione. Basta verificare $(AA^T)^T = AA^T$. Per il Teorema 4:

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T \quad \checkmark$$

Esercizio Svolto

Sia $n \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare per induzione che:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1} + \cdots + a + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Base ($n = 1$): ambo i membri valgono $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\checkmark$

Passo induttivo: supponiamo la formula vera per n , dimostriamola per $n + 1$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1} + \cdots + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & a^n + a^{n-1} + \cdots + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che coincide con la formula per $n + 1$.

Esercizio Svolto

Determinare tutte le matrici $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})[2]$ che commutano con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Imponendo $XA = AX$ e svolgendo i prodotti:

$$\begin{pmatrix} x & 2x + y \\ z & 2z + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ z & t \end{pmatrix}$$

Confrontando elemento per elemento: $z = 0$ e $t = x$, mentre y è libero. Le matrici cercate sono:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$