

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 13: Forma canonica di Jordan

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Blocchi di Jordan · Giordanizzabilità · Forma canonica · Pseudo-autospazi ·
Matrice giordanizzante

Indice

1	Blocchi di Jordan	1
2	Matrici a blocchi di Jordan e giordanizzabilità	2
3	Teorema di giordanizzabilità	3
4	Forma canonica di Jordan	4
4.1	Proprietà dei blocchi di Jordan	4
4.2	Classificazione delle forme canoniche di Jordan	5
4.3	Il metodo dei ranghi	6
5	Pseudo-autospazi e matrice giordanizzante	9
5.1	La catena degli pseudo-autospazi	10
5.2	Pseudo-autovettori e costruzione di P	11

1 Blocchi di Jordan

Definizione – Blocco di Jordan

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ e sia k un intero positivo. Si chiama **blocco di Jordan** di ordine k associato a λ la matrice quadrata $k \times k$:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{k \times k}$$

ovvero: λ su tutta la diagonale principale, 1 su tutta la *sopradiagonale*, 0 altrove.

Nota – Struttura

$J_k(\lambda)$ è una matrice triangolare superiore. Per $k = 1$ si ha semplicemente $J_1(\lambda) = (\lambda)$. Ogni matrice diagonale è un caso speciale di matrice a blocchi di Jordan in cui tutti i blocchi sono di ordine 1. Attenzione: gli 1 devono comparire sulla *sopradiagonale*, non sulla *sottodiagonale*; lo scambio di riga/colonna produce una matrice diversa che *non* è un blocco di Jordan.

Esempi di blocchi di Jordan

- $J_1(2) = (2)$, $J_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $J_4(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J_5(-\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$
- Su $\mathbb{C}$: $J_2(-i) = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J_4(1+2i) = \begin{pmatrix} 1+2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+2i \end{pmatrix}$
- *Non* sono blocchi di Jordan: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ha 1 anche nella *sottodiagonale*), $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (l'1 è nella *sottodiagonale*).

2 Matrici a blocchi di Jordan e giordanizzabilità

Definizione – Matrice a blocchi di Jordan

Una matrice quadrata $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ è detta **matrice a blocchi di Jordan** (o semplicemente **matrice di Jordan**) se è diagonale a blocchi e ogni blocco sulla diagonale è un blocco di Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

dove $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$. I valori λ_i non devono essere distinti. Gli zeri al di fuori dei blocchi sono spesso omessi nella notazione.

Esempi di matrici di Jordan

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (J_1(2), J_1(2), J_1(-1))$ è una matrice diagonale, quindi una matrice di Jordan con blocchi tutti di ordine 1.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(3) & 0 \\ 0 & J_2(i) \end{pmatrix}$ è una matrice di Jordan di ordine 4 con due blocchi di ordine 2.

(iii) *Non* è una matrice di Jordan: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (ha un 1 nella sottodiagonale, non nella sopradiagonale di un blocco). Non è una matrice di Jordan nemmeno: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ha un 1 al di fuori della sopradiagonale dei blocchi).

Definizione – Matrice giordanizzabile

Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ è detta **giordanizzabile** se è simile a una matrice di Jordan, ovvero se esistono una matrice di Jordan J e una matrice invertibile P tali che

$$J = P^{-1}AP.$$

In tal caso, J è chiamata **forma canonica di Jordan** di A e P è chiamata **matrice giordanizzante** per A .

Nota – Una forma canonica

Permutare i blocchi di Jordan lungo la diagonale produce matrici di Jordan distinte ma tutte simili ad A . È quindi corretto parlare di *una* forma canonica di Jordan di A , non di *la* forma canonica: la scelta dell'ordine dei blocchi è convenzionale.

Esempio di giordanizzazione

Si considerino

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'inversa è $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Si verifica che $P^{-1}AP = J = J_2(1)$, quindi A è giordanizzabile con forma canonica di Jordan $J_2(1)$.

3 Teorema di giordanizzabilità

Teorema – Criterio di giordanizzabilità

Una matrice quadrata A a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) è giordanizzabile su $\mathbb{K}$ se e solo se il suo polinomio caratteristico ha tutte le radici in $\mathbb{K}$.

Nota – Nota

Il teorema non viene dimostrato in questo corso per l'elevata complessità degli strumenti richiesti. Da esso discendono due corollari immediati.

Proposizione – Giordanizzabilità su $\mathbb{R}$

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ è giordanizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se tutti i suoi autovalori sono reali.

Proposizione – Giordanizzabilità su $\mathbb{C}$

Ogni matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ è giordanizzabile su $\mathbb{C}$.

Dimostrazione

Entrambi i risultati seguono dal teorema principale. Su $\mathbb{R}$, la condizione è che tutte le radici del polinomio caratteristico siano in $\mathbb{R}$, cioè che tutti gli autovalori siano reali; si noti che la *molteplicità* non entra in gioco. Su $\mathbb{C}$, il teorema fondamentale dell'algebra garantisce che ogni polinomio a coefficienti complessi ha tutte le radici in $\mathbb{C}$; quindi ogni matrice complessa è giordanizzabile su $\mathbb{C}$. $\square$

Nota – Nota storica su Jordan

Camille Jordan (matematico francese dell'Ottocento) è celebre in algebra per la forma canonica che porta il suo nome, ma anche in topologia per il *teorema della curva di Jordan*: ogni curva chiusa semplice nel piano divide il piano in una regione limitata (parte interna) e una illimitata (parte esterna). Questo risultato, di enunciato intuitivo, è sorprendentemente difficile da dimostrare con rigore analitico. Fu formalizzato circa quarant'anni dopo che Gauss aveva implicitamente utilizzato, nella sua prima dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra, un fatto topologico equivalente, senza però disporre di una dimostrazione completa. Per riparare alla lacuna, Gauss fornì altre due dimostrazioni del teorema fondamentale che non facevano uso di tale assunzione.

4 Forma canonica di Jordan

4.1 Proprietà dei blocchi di Jordan

Proposizione – Proprietà del blocco di Jordan

Il blocco di Jordan $J_k(\lambda_0)$, per ogni $k \geq 1$, soddisfa le seguenti proprietà.

- (1) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = (-1)^k(\lambda - \lambda_0)^k$.
- (2) L'unico autovalore è λ_0 con *molteplicità algebrica* $m_a(\lambda_0) = k$.
- (3) La *molteplicità geometrica* è $m_g(\lambda_0) = 1$, *indipendentemente* da k .
- (4) L'unico autovettore (a meno di scalari) è $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, il primo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^k$.
- (5) $J_k(\lambda_0)$ è diagonalizzabile se e solo se $k = 1$.

Dimostrazione

(1)–(2). $J_k(\lambda_0)$ è triangolare superiore con λ_0 su tutta la diagonale, quindi il polinomio caratteristico è il prodotto degli elementi diagonali di $J_k(\lambda_0) - \lambda I_k$:

$$p(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k = (-1)^k(\lambda - \lambda_0)^k.$$

L'unico autovalore è λ_0 con $m_a(\lambda_0) = k$.

(3). Togliamo λ_0 dalla diagonale:

$$J_k(\lambda_0) - \lambda_0 I_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa è la matrice con 1 sulla sopradiagonale e 0 altrove. Le righe $1, 2, \dots, k-1$ sono non nulle e indipendenti (gli 1 si trovano in colonne diverse); solo la riga k è

nulla. Quindi $\text{rk}(J_k(\lambda_0) - \lambda_0 I_k) = k - 1$ e:

$$m_g(\lambda_0) = k - \text{rk}(J_k(\lambda_0) - \lambda_0 I_k) = k - (k - 1) = 1.$$

(4). Il sistema $(J_k(\lambda_0) - \lambda_0 I_k)v = \mathbf{0}$ impone $v_2 = v_3 = \dots = v_k = 0$, lasciando v_1 libero. L'autospazio è dunque $E(\lambda_0) = \text{Span}(e_1)$.

(5). $J_k(\lambda_0)$ è diagonalizzabile se e solo se $m_a = m_g$, cioè $k = 1$. $\square$

Nota – Conseguenza fondamentale

Ogni blocco di Jordan $J_{k_i}(\lambda_i)$, indipendentemente dal suo ordine k_i , contribuisce con *esattamente un autovettore* nella forma canonica. Di conseguenza:

- il numero di blocchi di Jordan associati a λ_0 è uguale alla molteplicità geometrica $m_g(\lambda_0)$;
- la somma degli ordini dei blocchi associati a λ_0 è uguale alla molteplicità algebrica $m_a(\lambda_0)$.

4.2 Classificazione delle forme canoniche di Jordan

Per una matrice con un solo autovalore λ_0 , la forma canonica di Jordan è una delle seguenti, in base a n .

Caso $n = 1$. L'unica possibilità è $J = J_1(\lambda_0) = (\lambda_0)$. Ha $m_a = m_g = 1$, è diagonalizzabile.

Caso $n = 2$. Ci sono due forme canoniche possibili:

Forma	Matrice esplicita	m_a	m_g
$(J_1(\lambda_0), J_1(\lambda_0))$	$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$	2	2
$J_2(\lambda_0)$	$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$	2	1

Caso $n = 3$. Ci sono tre forme canoniche possibili:

Forma	Matrice esplicita	m_a	m_g
(J_1, J_1, J_1)	$\lambda_0 I_3$	3	3
$(J_2(\lambda_0), J_1(\lambda_0))$	$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$	3	2
$J_3(\lambda_0)$	$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$	3	1

Per $n \leq 3$, la coppia (m_a, m_g) determina univocamente la forma canonica.

Caso $n = 4$. Ci sono cinque forme canoniche possibili:

Forma	m_a	m_g
(J_1, J_1, J_1, J_1)	4	4
(J_2, J_1, J_1)	4	3
(J_2, J_2)	4	2
(J_3, J_1)	4	2
J_4	4	1

Nota – Ambiguità per n maggiore o uguale a 4

Per $n = 4$, le forme $(J_2(\lambda_0), J_2(\lambda_0))$ e $(J_3(\lambda_0), J_1(\lambda_0))$ hanno *entrambe* $m_a = 4$ e $m_g = 2$, ma sono due matrici di Jordan distinte. Pertanto, per $n \geq 4$, la sola coppia (m_a, m_g) può non essere sufficiente a determinare univocamente la forma canonica; occorre ricorrere alla successione dei ranghi.

4.3 Il metodo dei ranghi

Proposizione – Molteplicità e blocchi

Sia $A \in \mathcal{M}_n$ con autovalore λ_0 e sia J la sua forma canonica di Jordan. Allora:

- (1) $m_a(\lambda_0)$ è uguale alla somma degli ordini dei blocchi di Jordan associati a λ_0 in J .
- (2) $m_g(\lambda_0)$ è uguale al numero di blocchi di Jordan associati a λ_0 in J (poiché ogni blocco contribuisce con esattamente un autovettore).

Definizione – Ranghi della matrice caratteristica

Sia $A \in \mathcal{M}_n$ con autovalore λ_0 . Per ogni intero $k \geq 1$ si pone

$$r_k = \text{rk}((A - \lambda_0 I_n)^k),$$

con la convenzione $r_0 = n$. La successione $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots$ è debolmente decrescente, con $r_k = 0$ per k sufficientemente grande.

Proposizione – Numero di blocchi per ordine

Il numero b_m di blocchi di Jordan di ordine m associati a λ_0 nella forma canonica di Jordan è

$$b_m = r_{m-1} - 2r_m + r_{m+1}.$$

In particolare:

$$\begin{aligned} b_1 &= n - 2r_1 + r_2, \\ b_2 &= r_1 - 2r_2 + r_3, \\ b_3 &= r_2 - 2r_3 + r_4. \end{aligned}$$

Nota – Strategia pratica

Nella pratica, per matrici di ordine piccolo, si procede così.

1. Si calcola $m_g(\lambda_0) = n - r_1$: questo è il numero totale di blocchi di Jordan per λ_0 .
2. Se le molteplicità (m_a, m_g) determinano già univocamente la forma canonica (tipicamente per $n \leq 3$), ci si ferma.
3. Altrimenti si calcola r_2 (e se necessario $r_3, r_4, \dots$) per contare i blocchi di ciascun ordine usando le formule sopra.

Una volta noti i blocchi di ordine 1, i restanti si deducono per differenza, senza calcolare tutti gli r_k .

Vediamo subito le formule in azione.

Esempio — Caso 3x3 con un solo autovalore

Sia $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ con unico autovalore $\lambda_0 = 1$. Supponiamo di aver calcolato:

$$r_1 = \text{rk}(A - I_3) = 2, \quad r_2 = \text{rk}(A - I_3)^2 = 1.$$

Soluzione. Il numero di blocchi è $m_g(1) = 3 - r_1 = 1$: c'è un solo blocco, di ordine $m_a(1) = 3$. Le formule confermano:

$$b_1 = 3 - 4 + 1 = 0, \quad b_2 = 2 - 2 + 0 = 0, \quad b_3 = 1 - 0 + 0 = 1.$$

La forma canonica è $J = J_3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio Svolto — Forma di Jordan con due autovalori

Trovare la forma canonica di Jordan di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda^2(1 - \lambda)$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ (m.a.=1, semplice) e $\lambda_2 = 0$ (m.a.=2).

Autovalore $\lambda_1 = 1$. Essendo semplice, contribuisce con $J_1(1)$.

Autovalore $\lambda_2 = 0$. La matrice caratteristica è A stessa. Calcoliamo:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2.$$

Quindi $r_1 = \text{rk}(A) = 2$, $r_k = 1$ per ogni $k \geq 2$. Il numero di blocchi 1×1 è:

$$b_1 = 3 - 2r_1 + r_2 = 3 - 4 + 1 = 0.$$

Non ci sono blocchi di ordine 1. Il numero di blocchi 2×2 è:

$$b_2 = r_1 - 2r_2 + r_3 = 2 - 2 + 1 = 1.$$

C'è un blocco $J_2(0)$.

Forma canonica.

$$J = (J_1(1), J_2(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio Svolto — Forma di Jordan 4x4

Trovare la forma canonica di Jordan di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 2)$. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ (m.a.=3) e $\lambda_2 = 2$ (m.a.=1, semplice).

Autovalore $\lambda_2 = 2$. Semplice: contribuisce con $J_1(2)$.

Autovalore $\lambda_1 = 0$. La matrice caratteristica è A stessa. Le righe di A sono: $(1, -1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 0)$, $(1, -1, -1, 1)$. La terza riga è nulla; la quarta è uguale alla prima meno la seconda: $\text{rk}(A) = 2$. Quindi

$$m_g(0) = 4 - \text{rk}(A) = 2:$$

ci sono due blocchi per $\lambda_1 = 0$. Con $m_a(0) = 3$ e due blocchi, la decomposizione è necessariamente $1 + 2 = 3$, cioè un $J_1(0)$ e un $J_2(0)$.

Forma canonica.

$$J = \begin{pmatrix} J_1(2) & 0 & 0 \\ 0 & J_1(0) & 0 \\ 0 & 0 & J_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica: il polinomio caratteristico di J è $\lambda^3(\lambda - 2) = p_A(\lambda)$. ✓

Esercizio Svolto — Caso ambiguo 4x4

Trovare la forma canonica di Jordan di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^4$: unico autovalore $\lambda_0 = 1$ con $m_a(1) = 4$.

Calcolo di r_1 .

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scalini: $r_1 = \text{rk}(A - I_4) = 2$, quindi $m_g(1) = 4 - 2 = 2$. Ci sono due blocchi di Jordan. Le possibilità compatibili con $m_a = 4$, $m_g = 2$ sono (J_2, J_2) oppure (J_1, J_3) : è necessario calcolare r_2 .

Calcolo di r_2 .

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = 1.$$

Numero di blocchi di ordine 1:

$$b_1 = 4 - 2r_1 + r_2 = 4 - 4 + 1 = 1.$$

C'è un blocco $J_1(1)$. Con due blocchi totali, il secondo ha ordine 3 (perché $1+3 = 4$): si esclude il caso (J_2, J_2) .

Forma canonica.

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & 0 \\ 0 & J_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Pseudo-autospazi e matrice giordanizzante

Quando A non è diagonalizzabile, per costruire la matrice giordanizzante P non bastano gli autovettori. Occorre estendere il concetto di autovettore ai cosiddetti *pseudo-autovettori* (o autovettori generalizzati).

5.1 La catena degli pseudo-autospazi

Definizione – Pseudo-autospazi

Sia $A \in \mathcal{M}_n$ con autovalore λ_0 . Per ogni intero $k \geq 1$ si definisce il **pseudo-autospazio di ordine k** associato a λ_0 :

$$E^k(\lambda_0) = \text{Ker}((A - \lambda_0 I_n)^k).$$

Per convenzione, $E^0(\lambda_0) = \{\mathbf{0}\}$. Si osserva che $E^1(\lambda_0) = \text{Ker}(A - \lambda_0 I_n)$ è il solito autospazio associato a λ_0 .

Proposizione – Catena crescente degli pseudo-autospazi

La successione degli pseudo-autospazi forma una catena crescente:

$$\{\mathbf{0}\} = E^0(\lambda_0) \subseteq E^1(\lambda_0) \subseteq E^2(\lambda_0) \subseteq E^3(\lambda_0) \subseteq \dots \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione

Sia $v \in E^k(\lambda_0)$, ovvero $(A - \lambda_0 I_n)^k v = \mathbf{0}$. Applicando ancora una volta la matrice caratteristica:

$$(A - \lambda_0 I_n)^{k+1} v = (A - \lambda_0 I_n) \cdot \underbrace{(A - \lambda_0 I_n)^k v}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0}.$$

Quindi $v \in E^{k+1}(\lambda_0)$, il che prova $E^k(\lambda_0) \subseteq E^{k+1}(\lambda_0)$. In termini di rango, poiché moltiplicare ripetutamente per una stessa matrice può soltanto abbassare il rango, si ha $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots$ e le dimensioni $\dim E^k = n - r_k$ crescono di conseguenza. $\square$

Proposizione – Stabilizzazione della catena

Essendo $\mathbb{R}^n$ finito-dimensionale, la catena degli pseudo-autospazi si stabilizza: esiste un indice m tale che

$$E^m(\lambda_0) = E^{m+1}(\lambda_0) = E^{m+2}(\lambda_0) = \dots$$

La catena non deve necessariamente raggiungere $\mathbb{R}^n$: può stabilizzarsi in un sottospazio proprio.

Dimostrazione

La successione $\dim E^0(\lambda_0) \leq \dim E^1(\lambda_0) \leq \dim E^2(\lambda_0) \leq \dots$ è non decrescente e superiormente limitata da n . Essendo una successione di interi, deve essere definitivamente costante da un certo indice m in poi. Una volta che $\dim E^m = \dim E^{m+1}$, per l'inclusione già dimostrata si ha $E^m = E^{m+1}$, e quindi anche $E^m = E^{m+k}$ per ogni $k \geq 0$. $\square$

5.2 Pseudo-autovettori e costruzione di P

Definizione – Pseudo-autovettore

Un vettore $v \neq \mathbf{0}$ è detto **pseudo-autovettore di ordine k** associato a λ_0 se

$$v \in E^k(\lambda_0) \setminus E^{k-1}(\lambda_0),$$

cioè $(A - \lambda_0 I_n)^k v = \mathbf{0}$ ma $(A - \lambda_0 I_n)^{k-1} v \neq \mathbf{0}$. I pseudo-autovettori di ordine 1 sono i normali autovettori di A associati a λ_0 .

Nota – Costruzione della catena per un blocco $J_k(\lambda_0)$

Per costruire le k colonne di P corrispondenti a un blocco $J_k(\lambda_0)$:

1. Si sceglie un pseudo-autovettore $v \in E^k(\lambda_0) \setminus E^{k-1}(\lambda_0)$.
2. Si calcola la **catena** applicando ripetutamente la matrice caratteristica $A - \lambda_0 I_n$:

$$c_1 = (A - \lambda_0 I_n)^{k-1} v, \quad c_2 = (A - \lambda_0 I_n)^{k-2} v, \quad \dots, \quad c_{k-1} = (A - \lambda_0 I_n) v, \quad c_k = v.$$

3. Le colonne $c_1, c_2, \dots, c_k$ vengono inserite in quest'ordine nelle colonne di P corrispondenti al blocco $J_k(\lambda_0)$.

Il primo elemento $c_1 = (A - \lambda_0 I_n)^{k-1} v$ è sempre un autovettore di A , perché $(A - \lambda_0 I_n) c_1 = (A - \lambda_0 I_n)^k v = \mathbf{0}$. Se la forma canonica ha più blocchi con lo stesso λ_0 , i vettori di partenza per catene diverse devono essere scelti *indipendenti* in $E^k(\lambda_0)$.

Nota – Importanza dell'ordine nelle colonne di P

L'ordine $c_1, c_2, \dots, c_k$ (autovettore per primo, pseudo-autovettore generante per ultimo) è imposto dalla struttura della forma canonica di Jordan, in cui gli 1 sono sulla *sopradiagonale*. Invertire l'ordine, o mescolare vettori di catene diverse, produce una matrice P non invertibile o che non coniuga A alla forma di Jordan desiderata.

Vediamo due esempi completi.

Esercizio Svolto — Matrice giordanizzante 3x3

Trovare la forma canonica di Jordan e la matrice giordanizzante per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Soluzione.

Passo 1: Autovalori. $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda - 4)^2$. Autovalori: $\lambda_1 = 1$ (semplice) e $\lambda_2 = 4$ (m.a. = 2).

Passo 2: Forma canonica. Per $\lambda_1 = 1$: semplice $\Rightarrow$ blocco $J_1(1)$. Per $\lambda_2 = 4$: calcoliamo

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 2 (la seconda riga impone $y = 0$; le righe 1 e 3 sono indipendenti tra loro e dalla seconda), quindi $m_g(4) = 3 - 2 = 1 \neq m_a(4) = 2$. La matrice *non è diagonalizzabile* e il blocco per $\lambda_2 = 4$ è $J_2(4)$.

Forma canonica:

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & 0 \\ 0 & J_2(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Passo 3: Autovettore per $\lambda_1 = 1$. Risolviamo $(A - I_3)v = 0$:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Il sistema dà $y = z$ e $9x + 2y + 6z = 0 \Rightarrow 9x + 8y = 0$. Scegliendo $y = 9$: $x = -8$, $z = 9$. Autovettore: $w_1 = (-8, 9, 9)^T$.

Passo 4: Catena per $\lambda_2 = 4$. Calcoliamo $E^1(4)$ e $E^2(4)$.

Autospazio $E^1(4) = \text{Ker}(A - 4I_3)$. La seconda riga di $A - 4I_3$ dà $-3y = 0 \Rightarrow y = 0$; la prima dà $-3x - z = 0 \Rightarrow z = -3x$.

$$E^1(4) = \text{Span}((-1, 0, 3)^T).$$

Verifica: $A(-1, 0, 3)^T = (-1 - 3, 0, -9 + 21)^T = (-4, 0, 12)^T = 4(-1, 0, 3)^T$. ✓

Pseudo-autospazio $E^2(4) = \text{Ker}((A - 4I_3)^2)$. Si calcola:

$$(A - 4I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango 1 (tutte le righe sono proporzionali a $(0, 1, 0)$), quindi $\dim E^2(4) = 3 - 1 = 2$. Il sistema $(A - 4I_3)^2 v = 0$ impone solo $y = 0$:

$$E^2(4) = \{y = 0\} = \text{Span}((1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T).$$

Scelta del pseudo-autovettore. Prendiamo $v_2 = (1, 0, 0)^T \in E^2(4) \setminus E^1(4)$ (non è proporzionale a $(-1, 0, 3)^T$).

Calcolo della catena.

$$v_1 = (A - 4I_3)v_2 = \text{colonna 1 di } (A - 4I_3) = (-3, 0, 9)^T = 3(-1, 0, 3)^T.$$

Si verifica che v_1 è un autovettore per $\lambda_2 = 4$. ✓

Passo 5: Matrice giordanizzante. Nell'ordine imposto da $J = (J_1(1), J_2(4))$, le colonne di P sono w_1 (per il blocco $J_1(1)$), quindi v_1, v_2 (per il blocco $J_2(4)$):

$$P = (w_1 \quad v_1 \quad v_2) = \begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 9 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che $P^{-1}AP = J$.

Esercizio Svolto — Matrice giordanizzante 5x5

Trovare la forma canonica di Jordan e la matrice giordanizzante per

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione.

Autovalori. $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3(2 - \lambda)^2$. Autovalori: $\lambda_1 = 1$ (m.a.= 3) e $\lambda_2 = 2$ (m.a.= 2).

Forma canonica.

Per $\lambda_1 = 1$: la matrice $A - I_5$ ha rango 3, quindi $m_g(1) = 2$. Due blocchi con somma degli ordini 3: necessariamente $J_1(1)$ e $J_2(1)$.

Per $\lambda_2 = 2$: la matrice $A - 2I_5$ ha rango 4, quindi $m_g(2) = 1$. Un solo blocco di ordine 2: $J_2(2)$.

$$J = \begin{pmatrix} J_1(1) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(1) & 0 \\ 0 & 0 & J_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Catena per $\lambda_1 = 1$, blocco $J_2(1)$. Risolvendo i sistemi associati a $A - I_5$ e $(A - I_5)^2$:

$$E^1(1) = \text{Span}((1, 0, 0, -1, 0)^T, (0, 0, 1, 0, -1)^T),$$

$$E^2(1) = \text{Span}((1, 0, 0, 0, -1)^T, (0, 0, 1, 0, -1)^T, (0, 0, 0, 1, -1)^T).$$

Si sceglie $v_2 = (0, 0, 0, 1, -1)^T \in E^2(1) \setminus E^1(1)$. La catena:

$$v_1 = (A - I_5)v_2 = (0, 0, -1, 0, 1)^T \in E^1(1).$$

Per il blocco $J_1(1)$ si sceglie $w_1 = (1, 0, 0, -1, 0)^T$, indipendente da v_1, v_2 .

Catena per $\lambda_2 = 2$, blocco $J_2(2)$.

$$E^1(2) = \text{Span}((0, 1, 0, 0, 0)^T),$$

$$E^2(2) = \text{Span}((0, 1, 0, 0, 0)^T, (0, 0, 1, 0, 0)^T).$$

Si sceglie $u_2 = (0, 0, 1, 0, 0)^T \in E^2(2) \setminus E^1(2)$. La catena:

$$u_1 = (A - 2I_5)u_2 = \text{colonna 3 di } (A - 2I_5) = (0, 1, 0, 0, 0)^T \in E^1(2).$$

Matrice giordanizzante. Nell'ordine imposto da $J = (J_1(1), J_2(1), J_2(2))$, le colonne di P sono w_1, v_1, v_2, u_1, u_2 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che $P^{-1}AP = J$.

Nota – Caso su $\mathbb{C}$: autovalori complessi

Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ha autovalori complessi, non è giordanizzabile su $\mathbb{R}$ (per il teorema precedente), ma lo è su $\mathbb{C}$. In tal caso si applica la stessa procedura lavorando su $\mathbb{C}$.

Come esempio, la matrice di rotazione di 90° nel piano $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ha polinomio caratteristico $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, con autovalori $\lambda_{1,2} = \pm i$. Non è giordanizzabile su $\mathbb{R}$; su $\mathbb{C}$ entrambi gli autovalori sono semplici, quindi la forma canonica di Jordan è già diagonale:

$$J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(i) & 0 \\ 0 & J_1(-i) \end{pmatrix}.$$

Questo è coerente con il fatto geometrico che una rotazione non fissa alcuna retta reale nel piano, e pertanto A non ha autovettori reali.