

Appunti di Algebra e Geometria

Capitolo 1: Numeri Complessi

Autore: Tommaso C.

Appunti tratti dal testo di riferimento e dalle lezioni in aula

Argomenti: Costruzione di $\mathbb{C}$ · Operazioni · Modulo e coniugato
Piano di Argand-Gauss · Forma trigonometrica · Radici n -esime · Teorema fondamentale
dell'Algebra

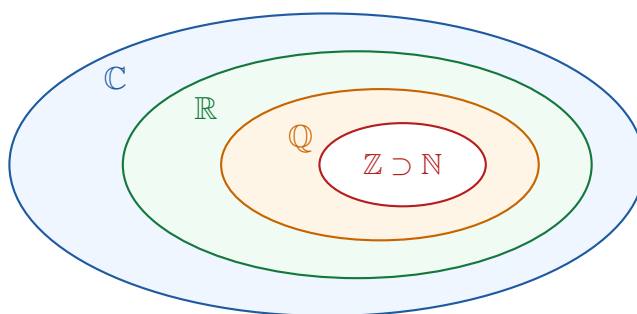
Indice

1	Motivazione e costruzione di $\mathbb{C}$	1
2	Operazioni con i numeri complessi	1
3	Modulo e coniugato	2
4	Il piano di Argand-Gauss	3
5	Forma trigonometrica	5
6	Radici n -esime di un numero complesso	7
7	Equazioni di secondo grado e Teorema fondamentale dell'Algebra	8

1 Motivazione e costruzione di $\mathbb{C}$

La necessità di estendere i sistemi numerici nasce dall'impossibilità di risolvere certe equazioni:

- $x + 1 = 0$ impossibile in $\mathbb{N} \Rightarrow$ si introducono $\mathbb{Z}$ (0 è il minimo di $\mathbb{N}$: nessun naturale ha 0 come successore)
- $2x = 1$ impossibile in $\mathbb{Z} \Rightarrow$ si introducono $\mathbb{Q}$ (1 è dispari, non è doppio di nessun intero)
- $x^2 = 2$ impossibile in $\mathbb{Q} \Rightarrow$ si introducono $\mathbb{R}$ ($\sqrt{2}$ è irrazionale)
- $x^2 + 1 = 0$ impossibile in $\mathbb{R} \Rightarrow$ si introducono $\mathbb{C}$ (in $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ sempre, quindi $x^2 + 1 \geq 1 > 0$)



Gerarchia degli insiemi numerici: ogni insieme è contenuto nel successivo.

Definizione – Unità immaginaria

Si chiama **unità immaginaria** il simbolo i che verifica $i^2 = -1$. Si ha $i \notin \mathbb{R}$ poiché in $\mathbb{R}$ la somma di due quadrati non può essere nulla.

Definizione – Numero complesso

Un **numero complesso** è un'espressione della forma $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, dove $a = \Re(z)$ è la **parte reale** e $b = \Im(z)$ è la **parte immaginaria**. L'insieme di tutti i numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$.

Nota

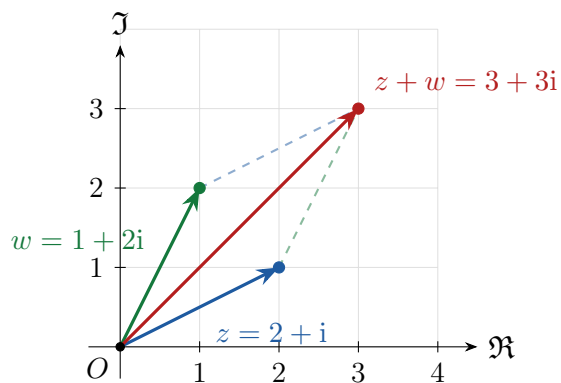
$z \in \mathbb{R} \iff \Im(z) = 0$. z è **immaginario puro** se $\Re(z) = 0$ (es. i , $-3i$, $\frac{7}{4}i$).

2 Operazioni con i numeri complessi

Dati $z = a + bi$ e $w = c + di$:

Definizione – Somma e prodotto

$$z + w = (a + c) + (b + d)i, \quad z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$



La somma di numeri complessi corrisponde alla regola del parallelogramma.

Teorema – Inverso di un numero complesso

Sia $z = a + bi \neq 0$. Allora

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Il **quoziente** è $\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$ per $w \neq 0$.

Nota

Trucco pratico: moltiplicare per il **coniugato** del denominatore:

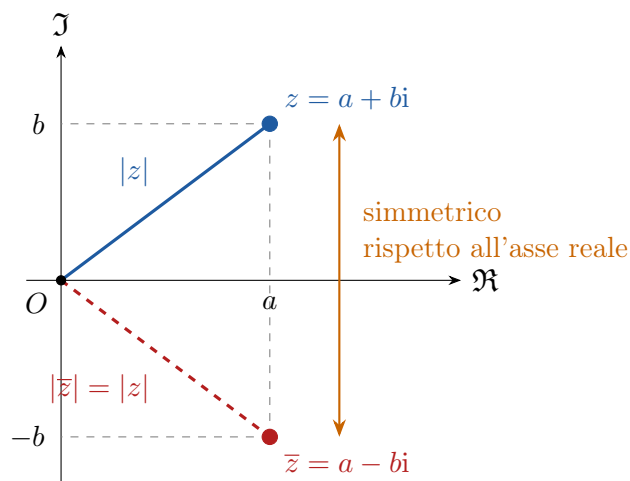
$$\frac{1 - 2i}{1 + i} = \frac{(1 - 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 - 3i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

3 Modulo e coniugato

Definizione – Modulo e coniugato

Per $z = a + bi \in \mathbb{C}$:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{modulo}), \quad \bar{z} = a - bi \quad (\text{coniugato}).$$



Il coniugato $\bar{z}$ è il simmetrico di z rispetto all'asse reale. Il modulo $|z|$ è la distanza dall'origine.

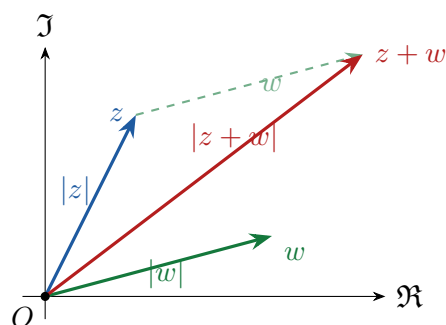
Teorema – Proprietà di modulo e coniugato

Per $z, w \in \mathbb{C}$:

- (i) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- (ii) $z + \bar{z} = 2\Re(z)$
- (iii) $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$
- (iv) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- (v) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (vi) $|\Re(z)| \leq |z|, |\Im(z)| \leq |z|$
- (vii) $w^{-1} = \bar{w}/|w|^2$ e $z/w = z\bar{w}/|w|^2$ per $w \neq 0$

Teorema – Disuguaglianza triangolare

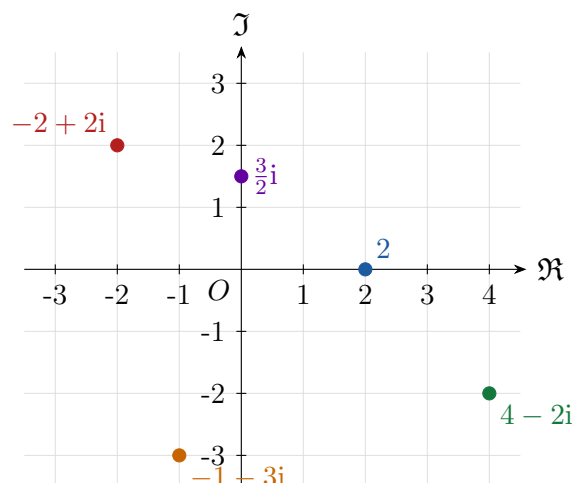
$$|zw| = |z| \cdot |w| \quad \text{e} \quad |z + w| \leq |z| + |w|.$$



Geometricamente: un lato del triangolo è $\leq$ della somma degli altri due.

4 Il piano di Argand-Gauss

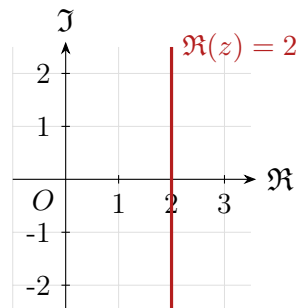
Ogni $z = a + bi$ corrisponde alla coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La rappresentazione nel piano cartesiano è il **piano di Argand-Gauss**: asse x = asse reale, asse y = asse immaginario.



Vari numeri complessi nel piano di Argand-Gauss.

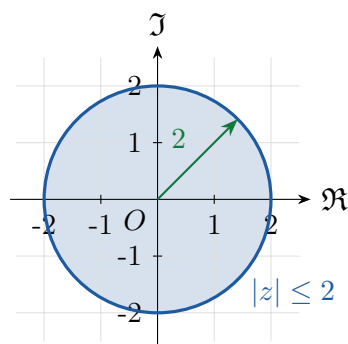
Esercizio Svolto

Risolvere $\Re(z) = 2$. Ponendo $z = x + yi$: $x = 2$, una retta verticale.



Esercizio Svolto

Risolvere $|z| \leq 2$. $x^2 + y^2 \leq 4$: disco chiuso di centro O e raggio 2.



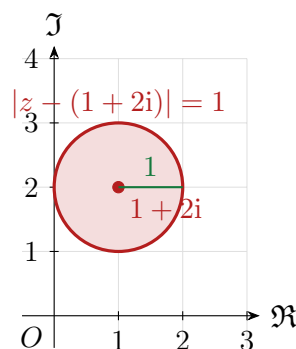
Esercizio Svolto

Descrivere l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + 2i)| = 1\}$.

La condizione $|z - (1 + 2i)| = 1$ rappresenta l'insieme dei punti z la cui distanza dal punto $1 + 2i$ è uguale a 1. Nel piano di Argand-Gauss, questa è una **circonferenza di centro** $C = (1, 2)$ **e raggio** $R = 1$.

In forma algebrica: ponendo $z = x + yi$, si ha

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = 1 \iff (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$



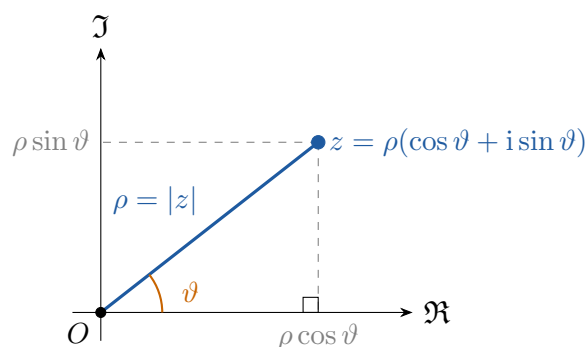
5 Forma trigonometrica

Definizione – Forma trigonometrica

Ogni $z \neq 0$ si scrive come

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta), \quad \rho = |z|, \quad x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta.$$

L'angolo ϑ si chiama **argomento** o **anomalia** di z (determinato mod 2π).

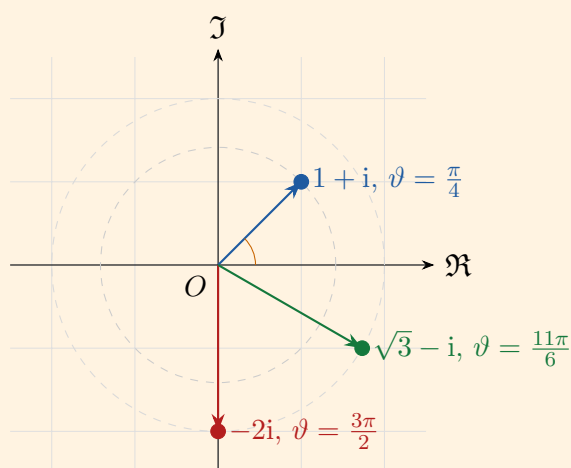


Il numero complesso z è individuato da modulo ρ e argomento ϑ .

Nota

Esempi di conversione:

- $z = -2i$: $\rho = 2$, $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$
- $z = 1 + i$: $\rho = \sqrt{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$
- $z = \sqrt{3} - i$: $\rho = 2$, $\vartheta = \frac{11\pi}{6}$



Teorema – Formule di De Moivre

Siano $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $n \in \mathbb{Z}^+$:

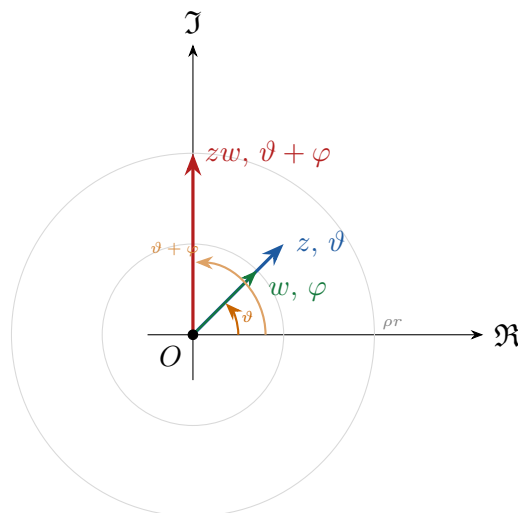
- (i) $zw = \rho r [\cos(\vartheta + \varphi) + i \sin(\vartheta + \varphi)]$

(ii) $z^n = \rho^n [\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)]$

(iii) $z^{-1} = \frac{1}{\rho} [\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta)], z \neq 0$

(iv) $\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r} [\cos(\vartheta - \varphi) + i \sin(\vartheta - \varphi)], w \neq 0$

Interpretazione: moltiplicare per w = scalare il modulo di r e *ruotare* di φ .



Moltiplicare $z \cdot w$: il modulo si moltiplica, l'argomento si somma (rotazione!).

Esercizio Svolto

Calcolare $(1 + i)^8$ (esercizio svolto in aula).

$z = 1 + i$: $\rho = \sqrt{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

De Moivre: $(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 [\cos(8 \cdot \frac{\pi}{4}) + i \sin(8 \cdot \frac{\pi}{4})] = 2^4 [\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)] = 16 \cdot 1 = \mathbf{16}$.

Esercizio Svolto

Calcolare $(\sqrt{3} - i)^6$.

$z = \sqrt{3} - i$: $\rho = 2$, $\vartheta = \frac{11\pi}{6}$.

De Moivre: $z^6 = 2^6 [\cos(11\pi) + i \sin(11\pi)] = 64 \cdot (-1) = \mathbf{-64}$.

Esercizio Svolto

Calcolare $(1 + i)^8$.

Si converte prima in forma trigonometrica:

$$1 + i = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}), \quad \rho = \sqrt{2}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}.$$

Si applica la formula di De Moivre con $n = 8$:

$$\begin{aligned} (1 + i)^8 &= (\sqrt{2})^8 [\cos(8 \cdot \frac{\pi}{4}) + i \sin(8 \cdot \frac{\pi}{4})] \\ &= 2^4 [\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)] \\ &= 16 \cdot (1 + 0 \cdot i) = \mathbf{16}. \end{aligned}$$

Osservazione: senza la forma trigonometrica, calcolare $(1 + i)^8$ richiederebbe sette moltiplicazioni successive.

6 Radici n -esime di un numero complesso

Definizione

Una **radice n -esima** di $z \in \mathbb{C}$ è ogni $w \in \mathbb{C}$ tale che $w^n = z$.

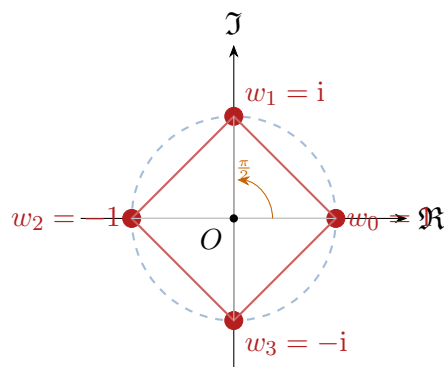
Teorema – De Moivre per le radici n -esime

Ogni $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \neq 0$ ha esattamente n radici n -esime:

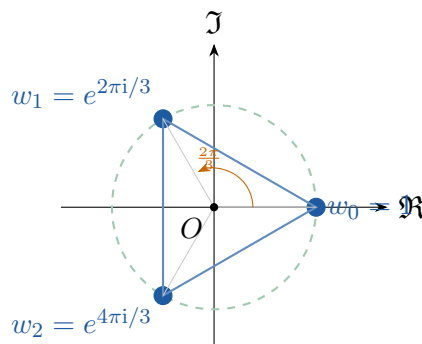
$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos \left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Nota

Le n radici si dispongono sui vertici di un **poligono regolare** di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{\rho}$, con argomenti equidistanti di $\frac{2\pi}{n}$.



Radici quarte dell'unità: vertici di un quadrato inscritto nella circonferenza unitaria.



Radici cubiche dell'unità: vertici di un triangolo equilatero.

Esercizio Svolto

Risolvere $|z|^2 z^2 = i$.

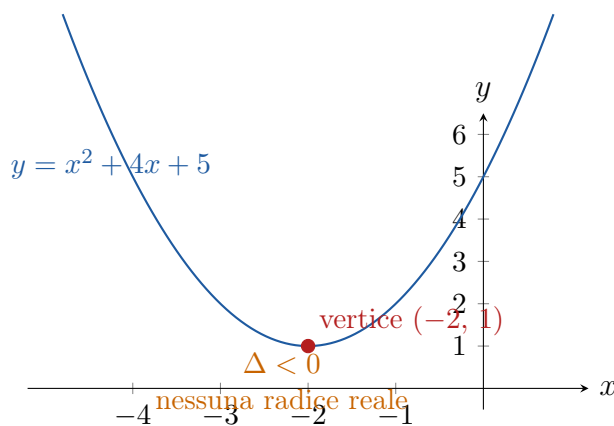
Con $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$: $\rho^4(\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow \rho = 1$; $2\vartheta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

$k = 0$: $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. $k = 1$: $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i)$.

7 Equazioni di secondo grado e Teorema fondamentale dell'Algebra

Per $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta = b^2 - 4ac < 0$: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.



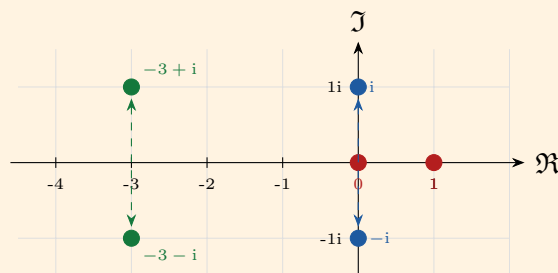
$y = x^2 + 4x + 5$ non tocca l'asse x : le radici sono $x = -2 \pm i$ (complesse coniugate).

Teorema – Radici coniugate

Polinomio di 2° grado reale con $\Delta < 0 \Rightarrow$ le due radici sono **complesse coniugate**.
Generalizzazione: le radici complesse non reali di un polinomio reale sono sempre **a coppie coniugate**.

Nota

Esempio. $p(x) = x(x - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 6x + 10)$: radici reali 0, 1; complesse coniugate $\pm i$ e $-3 \pm i$.



Radici complesse non reali sempre simmetriche rispetto all'asse reale.

Teorema – Teorema fondamentale dell'Algebra

Sia $p(x)$ un polinomio non costante a coefficienti in $\mathbb{C}$. Allora $p(x)$ ha tutte le sue n radici in $\mathbb{C}$ (contate con molteplicità). L'insieme $\mathbb{C}$ è *algebricamente chiuso*.

Nota

Non sono necessari ulteriori ampliamenti numerici oltre $\mathbb{C}$: ogni equazione polinomiale è completamente risolubile in $\mathbb{C}$.